Thèse

présentée à

l'Université de Provence

pour obtenir le grade de

docteur ès sciences physiques

par

Pierre Albarède

AUTO-ORGANISATION DANS LE SILLAGE 3D D'UN OBSTACLE NON PROFILE

tome 1: texte français

Soutenance le 3 juin 1991, devant le jury composé de MM.

Louis Boyer, directeur	Paul Clavin
Pierre Coullet	Christian Mathis
Yves Pomeau, président	Michel Provansal
Jean Pierre Rivet	David Tritton

Rapporteurs:

Yves Pomeau	Peter A. Monkewitz

Remerciements

Je remercie L. Boyer pour m'avoir mis sur la piste d'un problème passionnant; P. Monkewitz, M. Provansal, P. Clavin pour leur aide et leur critique. Je remercie les chercheurs, ingénieurs et techniciens du L.R.C. qui m'ont apporté leur soutien technique et moral; P. Haldenwang m'a fait profiter, en particulier, de son expérience de numéricien.

E. Berger, D. Gerich, C. Williamson, par leur correspondance, ont éclairci certains points expérimentaux. Je suis reconnaissant envers Y. Pomeau pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

La CEE (contrat no SC1-0212-C(TT)) et le LRC ont accordé leur soutien financier.

Avertissement

Ce mémoire comporte trois tomes:

tome 1: texte français
tome 2: texte anglais
tome 3: figures

Le lecteur francophone utilisera les tomes 1 et 3.
Le lecteur anglophone utilisera les tomes 2 et 3.

Cette configuration possède les avantages suivants:
- Le lecteur a un accès direct et simultané au texte et aux figures.
- Le tome 3, pris isolément, constitue une version en images de cette thèse.

Cette thèse obéit au régime de la "thèse unique", défini par l'arrêté du 23 novembre 1988.

Adresse

Laboratoire de Recherche en Combustion
UA 1117 CNRS - Université de Provence
service 252 faculté de Saint Jérôme
13397 Marseille CEDEX 13
tel (33) 91 28 84 13; fax (33) 91 63 52 61

Table des matières

0. Symboles et abréviations, définitions

Symboles et abréviations

vitesse de l'écoulement libre........ V_∞

diamètre de l'obstacle........ d

viscosité cinématique........ ν

masse volumique........ ρ

longueur de l'obstacle........ L

bidimensionnel........ 2D

tridimensionnel........ 3D

nombre de Reynolds........ Re

nombre de Reynolds critique du sillage plan........ Re_0

nombre de Reynolds critique du sillage 3D........ Re_1

limite supérieure pour la suppression du mode impair........ Re_m

limite supérieure pour l'existence du chevron brisé........ Re_w

couche limite de plaque de bout........ EPBL

équation de Ginzburg-Landau .... GL

avec

coefficients variables........ GLV

coefficients constants........ GLC

changement d'échelles de Kuramoto .... GLK

conditions aux limites nulles........ GL0

conditions aux limites périodiques........ GL1

(et n'importe quelle combinaison d'options telle que GLCK0, GLV1...)

égalité, dans une définition........ $\equiv$

très supérieur (inférieur) à........ $\gg$ ($\ll$)

approximativement égal à .... $\approx$

équivalent à........ $\sim$

Pour tout nombre complexe c:

partie réelle........ c_r = real(c)

partie imaginaire........ c_i = imag(c)

complexe conjugué........ c^*

argument (phase) .... arg(c)

ensemble des entiers relatifs........ $\mathbb{Z}$

anémométrie LASER Doppler........ LDA

Définitions

- Stationnaire: indépendant du temps.
- L'écoulement de base: écoulement stationnaire autour de l'obstacle, stable au dessous du nombre de Reynolds critique.
- L'écoulement bifurqué: écoulement instationnaire remplaçant l'écoulement de base, au dessus du nombre de Reynolds critique.
- z: coordonnée suivant l'axe de l'obstacle.
- Uniforme: indépendant de z, sur un certain intervalle.
- 2D: invariance par une translation quelconque suivant z.
- 3D: contraire de 2D.
- Sillage plan: écoulement autour d'un disque dans le plan (x, y) (un problème mathématique).
- Pour tout nombre réel r, int(r) est le plus grand entier relatif inférieur à r.
- Energie: carré du module de l'amplitude: $|A|^2$.

AUTO-ORGANISATION DANS LE SILLAGE 3D D'UN OBSTACLE NON PROFILE

Le sillage d'un obstacle allongé et non profilé est considéré comme un champ d'oscillateurs hydrodynamiques couplés, gouverné par une équation de Ginzburg-Landau, avec des conditions aux limites nulles. Dans le cas d'un écoulement de base uniforme, cette réduction dynamique reproduit fidèlement la plupart des effets 3D observés dans un sillage réel à bas nombre de Reynolds.

1. Introduction

Le sillage d'un obstacle est un écoulement ouvert tridimensionnel. "Ouvert" signifie que le domaine fluide n'est pas borné. Dans un écoulement ouvert interne, comme l'écoulement dans un tuyau, le fluide est entouré par des parois solides; ici, au contraire, les parois sont entourées par le fluide. De plus, j'observe le sillage dans le référentiel de l'obstacle, supposé inertiel, et je me limite au **proche** sillage. Le modèle proposé s'applique à un obstacle **allongé, mais fini**: il s'agit d'une équation de Ginzburg-Landau (GL) assortie de conditions aux limites nulles. Quelques aspects mathématiques originaux des solutions sont exposés et confrontés aux expériences.

Soit un obstacle de révolution allongé, d'axe z, de longueur L très supérieure à un quelconque diamètre d(z). L'écoulement amont est partout perpendiculaire à z, avec une direction uniforme x et un module stationnaire $V_\infty(z)$ (c.f. DRA 01). **L'obstacle ne doit pas vibrer.**

1.1. Résultats expérimentaux antérieurs et contradictions

Raisonnablement, les équations de Navier-Stokes doivent avoir des solution stationnaires, pour des conditions aux limites stationnaires. Cependant, l'instabilité hydrodynamique engendre souvent des solutions instationnaires, en particulier pour les obstacles non profilés, qui déforment fortement l'écoulement.

Le sillage d'un cylindre circulaire dans un écoulement uniforme fait l'objet d'une étude intensive depuis plus d'un siècle. Lorsque le nombre de Reynolds $Re = V_\infty d/\nu$ dépasse une valeur critique proche de 50, une fluctuation t-périodique (fonction périodique du temps) apparaît, et conduit à l'émission de vortex: c'est l'instabilité de Bénard-von Kármán. Dans les années 1950, Tritton (réf. 1) remarqua, dans l'intervalle $70 < Re < 90$, des fluctuations t-quasi-périodiques. Selon lui, la deuxième fréquence observée correspondait à un deuxième mode d'émission du sillage plan. Récemment, Lim (réf.) découvrit des instabilités t-quasi-périodiques de la solution potentielle inviscide de von Kármán (sillage plan) et fit référence à l'hypothèse de Tritton.

Cependant, si on compare les visualisations et enregistrements de vitesse de Tritton avec des travaux ultérieurs (entre autres, de Gaster (réf.), Gerrard (réf.)), on ne peut douter que son sillage fût 3D, avec des **cellules** le long de l'obstacle, oscillant à des fréquences distinctes et séparées par des dislocations de vortex. En fait, même les sillages t-périodiques ne sont pas 2D: les cœurs de vortex ne sont pas des droites parallèles à l'axe z. Berger (réf.) et Gerrard (réf.) rapportèrent la possibilité d'émission oblique, c'est dire des vortex rectilignes, mais pas dans la direction z; Hama (réf.), ou Slaouti et Gerrard (réf.), observèrent, par contre, des vortex en forme de parenthèse. Parfois, les vortex 3D se brisent, donnant des cellules et des fluctuations t-quasi-périodiques. L'explication de ces divers effets a suscité de nombreux articles depuis trente ans.

Gaster (réf.) induisit une deuxième fréquence et des vortex courbés en imposant un écoulement de base non-uniforme. D'après lui, on observe une discontinuité dans la relation fréquence-vitesse quand le nœud séparant deux cellules passe d'un côté à l'autre de la sonde. Curieusement, il ne put se débarrasser d'une deuxième fréquence, alors même que son écoulement paraissait uniforme (Gaster (réf.2)).

Les vibrations de l'obstacle sont un problème bien épineux, abordé très tôt par Berger (réf.), qui en tira parti pour contrôler l'instabilité. Berger et Wille (réf.) ont répertorié de nombreuses expériences contradictoires. Sreenivasan (réf.), cherchant à illustrer une théorie de la transition vers la turbulence, observa des fenêtres de chaos dans le sillage d'un obstacle. Van Atta et Gharib (réf.) révélèrent qu'un couplage aéro-élastique intervenait dans ses observations. Leurs "mesures suggèrent que s'il n'y avait absolument aucune vibration, la relation Strouhal-Reynolds (fréquence-vitesse) n'aurait absolument aucune discontinuité" (traduction).

Slaouti et Gerrard (réf.) "trouvèrent que la structure du sillage était fortement affectée par la configuration près des bouts de l'obstacle, qui dépendait elle même des contraintes imposées par la construction des bouts" (traduction). Plus précisément, Gerich et Eckelmann (réf.) identifièrent des cellules de bout dans les cas suivants: une plaque de bout (portant une couche limite, notée EPBL) ou une extrémité libre (la pression à la base est accrue par un court-circuit de pression autour du bout). Williamson (réf. 2) montra que l'effet de bout pouvait se propager sur toute la longueur de l'obstacle, imposer une émission oblique et divers effets 3D, sans non-uniformité de l'écoulement ni vibrations.

Les années 1980 apportèrent une avancée théorique: les propriétés de stabilité (globale) du sillage plan furent reliées aux propriétés de stabilité (locale) des profils de vitesse en différents x (Huerre et Monkewitz (réf.)). Cette approche eut pour avantage de préciser la position de l'obstacle, ce qui permit de déterminer l'évolution de petites perturbations dans l'espace (et dans le temps). Monkewitz (réf. 1), à partir des observations et de la modélisation faites au L.R.C. - par mes prédécesseurs Boyer, Mathis, Provansal-, remarqua que l'instabilité de Bénard-von Kármán était une **instabilité absolue**: les perturbations croissent sur place, et des oscillations auto-entretenues s'installent (et subsistent indépendamment du bruit). Les profils absolument instables se trouvent dans une zone finie, en aval de l'obstacle, qui constitue un "générateur d'ondes". Encore plus percutants, Triantafyllou et Karniadakis (réf.) affirment: "les sillages de vortex des corps non profilés peuvent être reproduits à partir de la seule donnée de l'écoulement moyen à un endroit précis en aval de l'objet, où il est le plus instable selon la théorie linéaire" (traduction). Dans le modèle de Landau développé au L.R.C., un simple oscillateur, i.e. une fonction complexe du temps A(t), représente le générateur d'ondes. Une équation autonome régit l'évolution de A, signifiant que le générateur d'ondes, qui dicte l'instabilité de tout le sillage, évolue de son propre chef. Tout à fait remarquablement, les même idées ont émergé simultanément de la théorie et de la pratique expérimentale.

Cependant, cette approche n'expliquait aucunement la t-quasi-périodicité. Même la solution numérique des équations de Navier-Stokes pour le sillage plan ne révéla pas de fluctuation t-quasi-périodique (Karniadakis et Triantafyllou (réf.), Sa et Chang (réf.)).

Les résultats de Mathis, Provansal, Boyer (réf. 1) confirmèrent que la t-quasi-périodicité impliquait des effets 3D. Louis Boyer me demanda d'améliorer le modèle de Landau, pour tenter d'expliquer ces effets spatio-temporels.

1.2. La nature des effets 3D à bas nombre de Reynolds

Au premier abord, c'est l'écoulement de base 2D qui présente le plus grand intérêt théorique. Malheureusement, peu d'informations sont disponibles sur cet écoulement, parce qu'il n'existe pas dans la nature et que son étude numérique est encore bien difficile. Cependant, à bas nombre de Reynolds, son instabilité est probablement 2D (émission parallèle), pour une raison théorique: le théorème de Squire (Drazin et Reid (réf.)); et pour une raison expérimentale: une émission parallèle stable peut être obtenue, malgré une géométrie finie, en manipulant les conditions de bout (Eisenlohr et Eckelmann (réf.), Williamson (réf. 2), Hammache et Gharib (réf.)).

A plus grand Re, des résultats de Hama (réf.), Provansal (réf.) et Williamson (réf. 1) mirent en évidence des structures z-périodiques, dont la longueur d'onde était indépendante du rapport d'aspect L/d. Ceci peut être interprété comme une instabilité secondaire de l'écoulement 2D: dans le cas le plus simple, l'écoulement 2D bifurqué devient linéairement instable vis à vis de perturbations z-sinusoidales (z-sinusoidales parce que, sommairement, une équation différentielle linéaire à coefficients constants entre en jeu). En réalité, l'apparition soudaine de structures hautement non-linéaires, comme des vortex en fer à cheval, et l'hysteresis, laissent supposer que des perturbations d'amplitude finie sont impliquées dans la transition.

Ici, il n'est pas question de ce genre d'instabilité 3D: on se restreint aux bas nombres de Reynolds, où l'écoulement de base 2D n'a pas d'instabilité 3D, (Re < 180 d'après Williamson (réf. 2)). Mais alors, pourquoi y a-t-il tant d'effets 3D à bas Re? Parmi toutes les raisons possibles, une est simplement incontournable: l'écoulement réel est borné suivant z, et, jusqu'à présent, cet **effet de longueur finie** n'a jamais été clairement reconnu.

Près du seuil, la longueur caractéristique diverge, comme prévu par la théorie des bifurcations des systèmes spatialement étendus (Kuramoto (réf.)), et on ne peut la négliger devant L, aussi grande soit-elle. Comme l'instabilité ne peut se développer librement, on obtient un comportement quasi-linéaire. Plus loin du seuil, par un processus de saturation hautement non-linéaire, la structure devient grossièrement indépendante de L, et l'effet de longueur finie se mue en **effet de bout.**

L'hypothèse d'un écoulement uniforme et d'une longueur finie permet d'expliquer maints effets 3D, qui furent jadis attribués à d'autres causes, comme la non-uniformité de l'écoulement. En fait, la confusion est aisée, car les effets 3D ont, pour la plupart, des traits identiques (vortex courbés ou inclinés, cellules, dislocations de vortex).

2. Construction du modèle

2.1. Ecoulement faiblement 3D

A cause de l'allongement de l'obstacle, l'écoulement varie lentement suivant z. Ainsi, il peut y avoir une relation entre l'écoulement à un z donné et le **sillage local**, défini comme l'écoulement **plan** autour de la section locale, avec la vitesse amont locale.

Prédire les propriétés faiblement 3D revient à trouver comment les sillages locaux organisent leur vie commune; c'est un problème d'auto-organisation, au sens de Haken (réf.) ou Kuramoto (réf.). Un couplage diffusif entre sillages locaux est proposé comme une approximation au plus bas ordre du couplage effectif.

2.2. Le sillage plan: remarques et modèle de Landau

2.2.1. Analyse dimensionnelle et modèle de von Kármán

Toutes les quantités inconnues dans le sillage plan d'un disque sont fonction des quatre paramètres extérieurs V_∞, d, ν, ρ. Les trois unités indépendantes de $\mathcal{M}$asse, $\mathcal{L}$ongueur et $\mathcal{T}$emps sont $\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T}$. Comme le problème est indépendant du choix des unités, n'importe quelle quantité physique x d'unité $\mathcal{M}^a\, \mathcal{L}^b\, \mathcal{T}^c$ est liée aux paramètres extérieurs par une fonction sans dimension $x_{\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{T}}$ telle que

$$\frac{x}{\mathcal{M}^a\, \mathcal{L}^b\, \mathcal{T}^c} = x_{\mathcal{M},\, \mathcal{L},\, \mathcal{T}}\left(\frac{V_\infty}{\mathcal{L}/\mathcal{T}}, \frac{d}{\mathcal{L}}, \frac{\nu}{\mathcal{L}^2/\mathcal{T}}, \frac{\rho}{\mathcal{M}/\mathcal{L}^3}\right)$$

Un choix canonique est $\mathcal{L} = d$ et $\mathcal{M} = \rho d^3$. Mais il y a trois possibilités pour $\mathcal{T}$:

• Echelle de temps de Roshko: $\mathcal{T} = d^2/\nu$.

$$x/(\mathcal{M}^a\, \mathcal{L}^b\, \mathcal{T}^c) = x_{\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{T}}\,(Re \equiv V_\infty d/\nu, 1, 1, 1) = x_R\,(Re) \qquad (1)$$

• Echelle de temps de Strouhal: $\mathcal{T} = d/V_\infty$.

$$x/(\mathcal{M}^a\, \mathcal{L}^b\, \mathcal{T}^c) = x_{\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{T}}\,(1, 1, Re^{-1}, 1) = x_S\,(Re) \qquad (2)$$

• Echelle de temps de Lin: $\mathcal{T} = \nu/V_\infty^2$ (nommée d'après Berger et Wille (réf.), p.316)

$$x/(\mathcal{M}^a\, \mathcal{L}^b\, \mathcal{T}^c) = x_{\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{T}}\,(Re^{-1}, 1, Re^{-2}, 1) = x_L(Re) \qquad (3)$$

Cette analyse dimensionnelle montre qu'on peut ne considérer qu'un seul paramètre extérieur, le nombre de Reynolds.

Dans le modèle (2D) de von Kármán (c.f. DRA 02),

κ la circulation de chaque vortex,

a la longueur d'onde, et

b la largeur de l'allée

forment un ensemble complet d'inconnues indépendantes.

c, célérité de l'allée de vortex (mesurée dans le même référentiel que V_∞), est alors donnée par

$V_\infty - c = \kappa/(2a)\ \mathrm{th}(\pi\ b/a)$.

Pour l'allée de vortex la moins instable (Lamb (réf.)),

$b/a = 0.281...$ et $V_\infty - c = \kappa/(2\sqrt{2}\ a)$.

Deux degrés de liberté ne peuvent être déterminés, parce que le modèle ne tient compte ni de la viscosité ni de l'obstacle.

Les caractéristiques du sillage réel dépendent de x, sauf la fréquence, à cause de la conservation du nombre de vortex. Précisément, si n(t, x) est le nombre de vortex par unité de longueur suivant x,

$\partial_t n + \partial_x(n\ c) = 0$ (4)

Dans les expériences, n(t, x) est stationnaire, et les deux termes de (4) sont nuls. La fréquence f = n c ne dépend pas de x. Pour un sillage 3D, avec plusieurs cellules, cette propriété s'applique à la fréquence de chaque cellule. Les fréquences des spectres t-quasi-périodiques sont les mêmes partout dans le sillage.

Ainsi la fréquence est-elle la quantité la plus aisément accessible du problème. Une mesure expérimentale de la fréquence du sillage plan (soumise toutefois à l'interprétation d'une expérience 3D) est fournie par la "courbe universelle" de Williamson (Williamson (réf. 2), fig. 15). Avec les notations de (1), (2), (3), je conserve une interpolation linéaire

$f_R = fd^2/\nu \approx -5.1064 + 0.2175\ Re = Ro_0 + Ro_1\ Re$ nombre de Roshko (5)

$f_S = f_R/Re$ nombre de Strouhal (6)

$f_L = f_R/Re^2 = f\nu/V_\infty{}^2$ nombre de Lin (7)

A V_∞ constant, on vérifie sur (5) que $d \to f$ est décroissante pour

$Re > -2\ Ro_0/Ro_1 \approx 47.0$ (8)

Comme le nombre de Reynolds critique du sillage plan est $Re_0 \approx 49$ (les estimations du § 4.1. vont de 48.4 à 49.7), (8) est vérifiée, et suggère même que

Re_0 soit le point critique de la relation d $\rightarrow$ f à V_∞ constant. Est-ce seulement une coïncidence?

2.2.2. Le modèle de Landau

Tout d'abord, je rappelle brièvement une partie des résultats expérimentaux de Mathis, Provansal, Boyer (réf.): la perte de stationnarité correspond à l'apparition d'un mode instable. Le champ fluctuant est donné par

$v(Re, t, x = 5d, y = 0, z) = real(A(Re, t, z))$, (1)

où A vérifie une équation de Landau

$A_t = \sigma' A - l' |A|^2 A$, (2)

avec

$\sigma' = \sigma_r' + i\ \sigma_i'$; $l' = l_r' + i\ l_i'$. (3)

σ_r' dépend de Re, et s'annule pour $Re = Re_1$, nombre de Reynolds critique du sillage réel, fortement dépendant du rapport d'aspect. Par convention, la pulsation linéaire $\sigma_i'(Re)$ est positive. La saturation implique $l_r' > 0$. Mais ce modèle n'explique pas les faits suivants:

- Re_1, σ_i' et l_r' dépendent du rapport d'aspect.
- L'énergie à saturation (et l_r') dépendent de z (Mathis, Provansal, Boyer (réf. 2)).
- Un second mode apparaît quand Re croît.

Clairement, ces effets sont 3D, et un modèle qui les prédise serait préférable.

Le premier élément en est le modèle de Landau **pour le sillage plan**: le champ fluctuant vérifie

$v(Re, t, x = 5d, y) = real(A(Re, t)\ f(y))$ (4)

(une définition plus précise est donnée en appendice A1)

$A_t = \sigma A - l |A|^2 A$ (5)

La solution asymptotique t-sinusoïdale correspond à un écoulement asymptotique t-périodique, obtenu dans les simulations numériques planes. σ et l sont fonctions des paramètres extérieurs. (2.2.1.$1) montre que $\sigma d^2/\nu$ (et $l\nu$) sont des fonctions de Re **seulement**: $\sigma d^2/\nu = \sigma_R(Re)$ et, par définition de Re_0, $\sigma_{rR}(Re_0) = 0$.

Il reste à introduire la troisième coordonnée d'espace, z.

2.3. Le sillage faiblement 3D: modèle de Ginzburg-Landau

Les paramètres extérieurs dans (2.2.2.$2) sont Re(z) et d(z). Le modèle de Landau pour le sillage plan est appliqué au sillage local, et on ajoute un couplage diffusif empirique:

$$v(t, x = 5d(z), y, z) = \mathrm{real}(\ A(t, z)\ f(y)\ ) \qquad (1)$$

$$\partial_t A = \sigma(\mathrm{Re}(z), d(z))\ A + \mu\ \partial_z^{\,2} A - l(\mathrm{Re}(z))\ |A|^2 A \qquad (2)$$

Le complexe μ est, en général, une fonction de l'écoulement de base, ici, les **fonctions** Re(z) et d(z).

<u>Les conditions aux limites</u>

Un endroit où l'oscillation du fluide s'annule s'appelle un **nœud**. Soient deux nœuds placés en z_1 et z_2; suivant la méthode de § 4.2., (2) est résolue sur $[z_1, z_2]$ avec les conditions aux limites

$$A(t, z_1) = 0 \text{ et } A(t, z_2) = 0 \qquad (3)$$

Comme l'obstacle est de longueur finie, le fluide doit cesser d'osciller quand $z \to \pm\infty$. C'est pourquoi il existe deux nœuds, appelés nœuds externes, l'un de z minimum, l'autre de z maximum. L'expérience montre qu'ils sont situés près des bouts ($z = \pm L/2$). (3), appliquée aux nœuds externes, représente les conditions aux limites physiques. En confondant la position des nœuds et des bouts,

$$A(t, \pm L/2) = 0 \qquad (4)$$

La solution de (2) peut engendrer des nœuds à l'intérieur de l'intervalle de définition: ces nœuds "internes" ont des singularités de phase, correspondant à des dislocations de vortex. Un nœud interne dont la position est connue peut être utilisé comme limite, sans affecter la solution A(t, z). La solution d'un côté du nœud est indépendante de la solution de l'autre côté: un nœud agit comme un **écran**.

Des conditions aux limites périodiques sont également possibles:

$$A(t, -L/2) = A(t, L/2) \qquad (5)$$

Elle ne représentent aucune situation physique (sauf le sillage d'un tore!).

3. Solution t-sinusoidale du modèle GLC0 pour un écoulement uniforme

(résultats analytiques et numériques)

3.1. Transformations et changement d'échelles

Transformations

Si $A(t, z)$ est solution de l'équation GL (2.3.\$2), alors

• Pour tout nombre complexe unitaire u, u $A(t, z)$ est aussi une une solution (d'où la stabilité marginale vis à vis des perturbations de phase).

• Pour tout nombre réel ω, $\exp(i\omega t)\, A(t, z)$ est solution de

$$\partial_t A = (\sigma + i\,\omega)A + \mu\, \partial_z{}^2 A - l\,|A|^2 A \qquad (1)$$

• $A(-t, z)^*$ n'est pas solution, sauf si les coefficients σ, μ, l sont imaginaires purs (cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire); cependant c'est une solution de l'équation conjuguée; les signes de μ_i et l_i sont relatifs à la convention adoptée pour le signe de σ_i.

• $A(t, z)^*$ n'est pas solution, sauf pour des coefficients réels.

• $A(t, -z)$ est solution si les coefficients sont des fonctions paires de z.

Echelles de Kuramoto

Dans le cas 3D, l'échelle de longueur introduite au § 2.2.1. est $\mathcal{L} = d(z_0)$, où z_0 est la position d'un sillage local typique. Kuramoto propose de nouvelles échelles, basées sur $\sigma_r(z_0)$, μ_r et $l_r(z_0)$:

$$A = A_K\, (\sigma_r / l_r)^{1/2},\ t = t_K\, \sigma_r^{-1},\ z = z_K\, (\mu_r / \sigma_r)^{1/2} \qquad (2)$$

Ces nouvelles échelles sont toujours utilisées dans ce chapitre, et les indices K superflus sont supprimés. Pour un écoulement de base uniforme, l'équation GL exprimée dans les nouvelles échelles, ou GLCK, est

$$A_t = (1+i\,c_0)\, A + (1+i\,c_1)\, A_{zz} - (1+i\,c_2)\, |A|^2 A \qquad (3)$$

avec $c_0 = \sigma_i/\sigma_r$, $c_1 = \mu_i/\mu_r$, $c_2 = l_i/l_r$.

3.2. Résultats exacts

Le problème à résoudre est (3.1.\$3), avec les conditions aux limites

$$A(\pm L_K/2) = 0 \qquad (1)$$

L'association de (3.1.\$3) et (1) constitue le problème GLCK0, objet principal du présent travail. Comme c_0 introduit un simple décalage de fréquence (d'après (3.1.$1)), les paramètres extérieurs mathématiques sont c_1, c_2 et la longueur de Kuramoto L_K, liée aux paramètres extérieurs physiques Re et L_R par

$$L_K = L\sqrt{\frac{\sigma_r}{\mu_r}} = \frac{L}{d}\sqrt{\frac{\sigma_r d^2/\nu}{\mu_r/\nu}} = L_R\sqrt{\frac{\sigma_{rR}(Re)}{\mu_{rR}(Re)}} \qquad (2)$$

Tant que la variation de $(c_1, c_2)(Re)$ peut être négligée, L_K gouverne à elle seule l'évolution du sillage au cours d'une variation de Re ou L_R. Comme $\sigma_r(Re_0) = 0$,

$$L_K \to 0 \text{ quand } Re \to Re_0 \qquad (3)$$

(divergence critique de l'échelle de longueur de Kuramoto)

3.2.1. Analyse

Une solution **t-sinusoidale** de GLCK0 s'écrit

$$A(t, z) = R(z) \exp(i\phi(t, z)) \qquad (1)$$

Les notations suivantes sont utilisées:

$$\phi(t, z) = (c_0 - c_2)t + \Phi(t, z)$$

$$\omega = \phi_t \qquad (2)$$

$$\Omega = \Phi_t \qquad (3)$$

$$q = \Phi_z$$

ϕ est la phase complète; Φ est la phase décalée; la pulsation complète ω est stationnaire, par hypothèse; la pulsation décalée Ω s'annule pour une émission parallèle; q est le nombre d'onde local. Les conditions aux limites sont

$$R(\pm L/2) = 0 \text{ et (par nécessité physique) } q \text{ bornée quand } z \to \pm L/2 \qquad (4)$$

Les parties réelle et imaginaire de GLCK se réduisent à

$$0 = R - R^3 + (R_{zz} - Rq^2) - c_1\,(2R_z q + Rq_z) \qquad (5)$$

$$R\,\Omega = c_2(R - R^3) + c_1\,(R_{zz} - Rq^2) + (2R_z q + Rq_z) \qquad (6)$$

Après deux combinaisons linéaires indépendantes,

$$R\,\Omega = -(c_1 - c_2)\,(R - R^3) + (1 + c_1{}^2)\,(2R_z q + Rq_z) \qquad (7)$$

$$c_1 R\,\Omega = (1 + c_1 c_2)(R - R^3) + (1 + c_1{}^2)\,(R_{zz} - Rq^2) \qquad (8)$$

Remarquant

$$R(2R_z q + Rq_z) = (qR^2)_z \qquad (9)$$

l'équation (7), associée aux conditions aux limites (4), mène à

$$\Omega(R) = -(c_1-c_2)\,(1 - M_4(R, L/2)/\,M_2(R, L/2)\,) \tag{10}$$

$$q(R, z) = R^{-2}(z)\,\frac{c_1-c_2}{1+c_1^2}\,M_4(R, L/2)\,\left(\frac{M_2(R, z)}{M_2(R, L/2)} - \frac{M_4(R, z)}{M_4(R, L/2)}\right) \tag{11}$$

en utilisant la fonctionnelle

$$M_n(R, z) \equiv \int_{-L/2}^{z} R(z')^n dz' \,. \tag{12}$$

Introduire $R(z) = R_z(0)\,Z + O(Z^2)$ où $Z = z+L/2 \to 0$ dans (11) mène à

$$q(R, z) = \frac{1}{3}\,\frac{c_1-c_2}{1+c_1^2}\,\frac{M_4(R, L/2)}{M_2(R, L/2)}\,Z + O(Z^2) \tag{13}$$

On peut éliminer q des équations (8) et (11), ce qui donne

$$R_{zz} = -\partial_R E_p(\Omega, R(z)) + f(R, z) \tag{14}$$

où

$$E_p(\Omega, R) = u(\Omega)\,R^2/2 - v\,R^4/4 \tag{15}$$

$$u(\Omega) = (1+c_1c_2-c_1\Omega)/(1+c_1{}^2),\; v = (1+c_1c_2)/(1+c_1{}^2) \tag{16}$$

(u dépend de R par l'intermédiaire de Ω)

$$f(R, z) \equiv R(z)^{-3}\left[\frac{c_1-c_2}{1+c_1^2}\,M_4(R, L/2)\,\left(\frac{M_2(R, z)}{M_2(R, L/2)} - \frac{M_4(R, z)}{M_4(R, L/2)}\right)\right]^2 \tag{17}$$

(14) est l'**équation du mouvement** d'une pseudo-particule, dont la position est R au pseudo-temps z, soumise au potentiel E_p et à la force non-conservative f, qui dépend de l'histoire du mouvement et de Ω. L'énergie est

$$E(z) = (1/2)\,R_z{}^2 + E_p(\Omega, R(z)) \tag{18}$$

Elle n'est pas une constante du mouvement, puisque sa dérivée pseudo-temporelle est la puissance de f:

$$E_z(z) = R_z(z)\,f(R, z) \tag{19}$$

En traçant la forme du potentiel, on peut voir si une solution avec R = 0 à des z distincts est possible, et il en résulte la proposition suivante:

$$\text{si } v \geq 0, \text{ alors } u(\Omega) > 0 \tag{20}$$

(Si $v \geq 0$ et $u \leq 0$, la particule lancée à R = 0 ne revient pas, et il n'y a pas de solution à (4), (5), (6).)

Si $(q(z), R(z), \Omega)$ est solution de (4), (5), (6), alors $(-q(-z), R(-z), \Omega)$ est aussi solution; on peut le vérifier directement, mais, à titre de test, je donne une preuve sur (10), (11), (14). Je définis, pour toute fonction f, la fonction Tf par

$Tf(z) \equiv f(-z)$ (21)

J'obtiens successivement

$M_n(TR, z) = M_n(R, L/2) - M_n(R, -z)$ (22)

$q(TR, z) = -Tq(R, z)$

$T\mathit{f}(R, z) = \mathit{f}(TR, z)$ (23)

$\Omega(TR) = \Omega(R)$

$\partial^2_{zz} TR(z) = T\, \partial^2_{zz}R = -\partial_R E_p(\Omega(TR), TR(z)) + \mathit{f}(TR, z)$

$(-Tq, TR, \Omega)$ est une solution de (10), (11), (14).

Le problème de l'unicité et de l'existence d'une solution au modèle GLCK0 vient d'être réduit sous la forme suivante: trouver (R, Ω) tel que

- $R(\pm L/2) = 0$.
- Ω est une fonction de R donnée par (10).
- $R(z)$ est le mouvement d'une particule soumise à un potentiel et une force non-conservative dépendant de $R(z')$ ($z' < z$) et Ω.

J'admets maintenant que ce problème possède au plus une solution (ici, comme dans bien d'autres cas, l'unicité résulte de la non-linéarité). Une conséquence immédiate est

$Tq = -q$ et $TR = R$ (24)

3.2.2. Comment construire une solution

Si Ω était connue, (3.2.1.$14) serait causale et pourrait être intégrée comme n'importe quelle équation du mouvement en mécanique, à partir de la position R = 0 et d'une vitesse donnée R_z au temps initial $z = -L/2$. Ceci suggère une détermination de Ω et R par approximations successives alternées. La récurrence est initiée par $\Omega = 0$ (pulsation décalée de l'émission parallèle), et poursuivie comme suit.

Pour Ω donnée, je cherche une vitesse initiale R_z telle que la particule lâchée à R = 0 à la vitesse R_z revienne après la durée L (ou, en utilisant la parité de R, fasse demi-tour après la durée L/2). Il s'agit là d'une méthode de tir corrigé. Le mouvement est en fait la moitié (ou le quart) d'une période d'un mouvement périodique. f s'annule en $z = p\, L/2$, $p \in \mathbb{Z}$, et n'interdit pas l'étude qualitative du mouvement.

L'existence d'une solution dépend de la valeur de L et des signes de u et v.

Le cas $u > 0$, $v > 0$ est traité par DRA 03, où apparaissent qualitativement $E_p(R)$ et $R(z)$ pour diverses valeurs initiales de R_z. La période suivant z est supérieure à la période linéaire π et toutes les valeurs $L > \pi$ conduisent à une solution unique. Quand $L \to \infty$, la particule fait demi-tour de plus en plus près du maximum de E_p:

$$\lim_{L \to \infty} R(0)^2 = \frac{u}{v} = 1 - \frac{c_1\Omega}{1+c_1c_2} \qquad (1)$$

Dès que R est connue, (3.2.1.$10) fournit une valeur de Ω normalement plus précise. On l'utilise pour calculer, si possible, un R plus précis, et ainsi de suite. La convergence vers une solution est probable. Cependant, j'en laisse la démonstration à d'autres, et j'admets l'**existence** d'une solution t-sinusoidale à GLCK0.

Bien sûr, la stabilité de la solution est un autre problème, traité numériquement au § 5.2.. Mais voici l'idée d'une approche analytique, dans le cas $u > 0$, $v > 0$ (c.f. DRA 03). La particule oscille dans le cratère du potentiel E_p, en forme de "volcan"; si elle frôle le "bord du cratère" à $z = 0$, la période L_K suivant z tend vers l'infini; alors une perturbation d'amplitude finie au pseudo-temps $z = 0$ peut éjecter la particule hors du cratère, sans espoir de retour. Les transitoires numériques indiquent qu'une telle perturbation intervient effectivement pendant la collision des chocs de phase (près de $z = 0$), avant l'établissement de l'état asymptotique (c.f. § 3.4.).

3.2.3. Cas particulier $c_1 = c_2$

Dans ce cas, GLCK est non-dispersive, puisque que toutes les ondes planes ont la même pulsation (c.f. (3.3.2.$2)). Il est alors facile de montrer que GLCK0 a une solution unique.

(3.2.1.$10) et (3.2.1.$11) donnent $\Omega = 0$ et $q = 0$; R est solution de

$$R_{zz} = -\partial_R E_p \text{ où } E_p(R) = R^2/2 - R^4/4 \qquad (1)$$

Après une première intégration:

$$R_z{}^2/2 + E_p(R) = E_p(R(0)) \qquad (2)$$

Une seconde intégration, exploitant les conditions aux limites, mène à une unique solution R(z), vérifiant

$$L = \Lambda(\, R(0)\,) \qquad (3)$$

où

$$\Lambda(r) \equiv 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,[1-\frac{1}{2}r^2(1+x^2)\,]}} \qquad (4)$$

La fonction Λ peut être développée en série entière de r^2 avec rayon de convergence 1:

$$\Lambda(r)/\pi = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + a_4 r^8 + \ldots \qquad (5)$$

$$a_0 = 1;\ a_1 = 3/8;\ a_2 = 57/256;\ a_3 = 0.15381\ldots;\ a_4 = 0.11576\ldots \qquad (6)$$

La saturation de R(0) pour L croissant apparaît sur NUM 01.

3.3. Résultats approchés

3.3.1. Approximations près du seuil: peu de modes linéaires instables

Dans un milieu fini, avec les conditions aux limites (3.2.$1), je diagonalise l'opérateur $(1+ic_0) + (1+ic_1)\partial_z^2$. Les valeurs propres sont

$$\sigma_n = 1-q_n^2 + i\,(c_0-q_n^2c_1) \text{ où } q_n = n\,\pi/L,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

La fonction propre associée à σ_n est

$$S_n(z) = \sin(q_n(z+L/2)) \qquad (2)$$

La solution générale du problème linéarisé

$$\partial_t A = (1+i\,c_0)\,A + (1+i\,c_1)\,\partial_z^2 A \qquad (3)$$

est par conséquent

$$A(t, z) = \Sigma_{\,n=1, 2 \ldots}\, A_n(t)\, S_n(z) \qquad (4)$$

A_n s'appelle "amplitude complexe **globale**" du mode (S_n, σ_n) et obéit à

$$d_t A_n = \sigma_n A_n \qquad (5)$$

$$A_n(t) = \exp(\sigma_n t)\, A_n(0) \qquad (6)$$

Le mode (S_n, σ_n) est linéairement instable pour $L > n\,\pi$. Cette proposition était connue dans le cas particulier $c_1 = c_2$, $n = 1$, sous la forme $\Lambda(0) = \pi$ (§ 3.2.3.).

La solution du problème GLCK0 appartient encore à l'espace des combinaisons linéaires du type (4), stable pour l'opération $A \rightarrow |A|^2 A$. Mais des termes d'**interaction non-linéaire** doivent être ajoutés aux équations (5).

Si $1 < L/\pi < 2$, tous les modes sauf (S_1, σ_1) sont linéairement amortis, et éliminés "adiabatiquement":

$$A(t, z) = A_1(t)\, S_1(z) \tag{7}$$

Introduire (7) dans l'équation GLCK (3.1.$3), et négliger les composantes autres que S_1, mène à une équation de Landau sur l'amplitude complexe globale A_1:

$$d_t A_1 = \sigma_1 A_1 - (3/4)\,(1+ic_2)\,|A_1|^2 A_1 \tag{8}$$

L'origine du coefficient du 3/4 est la relation $4 \sin^3(x) = 3 \sin(x) - \sin(3x)$. La solution asymptotique de (8) est

$$A_1 = R_1 \exp(\, i\omega_1 t\,) \tag{9}$$

avec

$$R_1{}^2 = (4/3)\,(1 - q_1{}^2) \tag{10}$$

$$\omega_1 = c_0 - c_2 - q_1{}^2 (c_1 - c_2)\ ;\ q_1 = \pi / L \tag{11}$$

$A(t, z) = A_1(t)\, S_1(z)$ est la somme de deux ondes planes, de nombres d'onde $\pm q_1$ et pulsation ω_1, interférant de manière à remplir les conditions aux limites. La relation (10) confirme le coefficient a_1 de (3.2.3.$6).

Si $2 < L/\pi < 3$, les modes avec $n > 2$ sont linéairement amortis, et je garde

$$A(t, z) = A_1(t)\, S_1(z) + A_2(t)\, S_2(z) \tag{12}$$

Ceci donne les équation couplées

$$d_t A_1 = \sigma_1 A_1 - (1+ic_2)\,[(3/4)|A_1|^2 A_1 + (1/2)\, A_1{}^* A_2{}^2 + A_1 |A_2|^2] \tag{13}$$

$$d_t A_2 = \sigma_2 A_2 - (1+ic_2)\,[(3/4)|A_2|^2 A_2 + (1/2)\, A_2{}^* A_1{}^2 + A_2 |A_1|^2\,] \tag{14}$$

A_1 peut être calculé en négligeant A_2 dans (13) (ce qui redonne en fait (8)), et introduit dans (14) en tant que forçage extérieur. Il s'ensuit $\lim_{t \to \infty} A_2 = 0$.

L'unique solution t-sinusoidale $(A_1, A_2) = (R_1 \exp(i\omega_1 t), 0)$ est aussi la solution asymptotique. Le mode (S_2, σ_2) est **non-linéairement amorti** (forcé à zéro) par le mode (S_1, σ_1).

En généralisant à toute valeur de L, le modèle GLCK0 a une solution t-sinusoidale, qui est en fait, avec $R_n \geq 0$ et φ_n réel,

$$A(t, z) = \exp(i\omega t) \sum_{1 \leq n\pi \leq L} R_n \exp(i\varphi_n)\, S_n(z) \tag{15}$$

D'après (3.2.1.$24), R_n est nul pour n pair: les modes (S_n, σ_n) avec n pair sont non-linéairement amortis. Les modes (S_n, σ_n) avec n impair sont présents, mais **accrochés**. La phase de A n'est pas forcément uniforme, ce qui correspond à une émission de vortex non parallèle.

L'approche précédente est partiellement fausse: à cause des effets non-linéaires, la somme (15) doit être étendue à tout n. Par exemple, même si $1 < L/\pi < 3$, les modes (S_n, σ_n) avec n = 3, 5, ... sont présents à cause du couplage non-linéaire. Ceci est pris en compte par un calcul de Monkewitz (réf. 2), au voisinage de $L = \pi$. On définit un petit $\varepsilon > 0$ par

$$L \equiv \pi\,(1+\varepsilon^2) \tag{16}$$

Des combinaisons linéaires indépendantes commodes des parties réelle et imaginaire de GLCK sont

$$0 = R - R^3 + (R_{zz} - R\Phi_z^{\,2}) - c_1\,(2R_z\Phi_z + R\Phi_{zz}) \tag{17}$$

$$R\Phi_t = (c_1 - c_2)\,(R_{zz} - R\Phi_z^{\,2}) + (1+c_1c_2)\,(2R_z\Phi_z + R\Phi_{zz}) \tag{18}$$

Définitions:

$$\text{pour } n \in \mathbb{Z},\ f_n \equiv \cos(n\,\pi z/L),\ g_n \equiv \sin(n\,\pi z/L); \tag{19}$$

pour n impair, $n = 2k+1$, $f_n \equiv \cos(n\,\pi z/L) = (-1)^k\, S_n(z)$.

La solution t-sinusoidale est développée en puissances de ε :

$$q = \varepsilon^2 \phi_{22} g_2 + \varepsilon^4(\phi_{42} g_2 + \phi_{44} g_4) + O(\varepsilon^6) \tag{20}$$

$$R = \varepsilon \rho_{11} f_1 + \varepsilon^3(\rho_{31} f_1 + \rho_{33} f_3) + \varepsilon^5(\rho_{51} f_1 + \rho_{53} f_3 + \rho_{55} f_5) + O(\varepsilon^7) \tag{21}$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2\,\Omega_2 + \varepsilon^4\,\Omega_4 + O(\varepsilon^6) \tag{22}$$

Introduire (20), (21), (22) dans (17), (18) donne:

• A l'ordre ε,

$$\Omega_0 = -\,(c_1 - c_2) \tag{23}$$

• A l'ordre ε^3,

$$\rho_{11}^{\,2} = 8/3 \tag{24}$$

$$\rho_{33}/\rho_{11} = -\,(1+c_1c_2)/(12(1+c_1^{\,2})) \tag{25}$$

$$\phi_{22} = -\,(c_1 - c_2)/(3(1+c_1^{\,2})) \tag{26}$$

$$\Omega_2 = 2(c_1 - c_2) \tag{27}$$

• A l'ordre ε^5,

$$\rho_{31}/\rho_{11} = -3/4 + (1+c_1c_2)/(24(1+c_1^{\,2})) + c_2\,(c_1 - c_2)/(72(1+c_1^{\,2}))$$

$$\rho_{31}/\rho_{11} = -\frac{50\, c_1^2 + (2c_1-c_2)^2 + 51}{72\,(1+c_1^2)} \tag{28}$$

$$\Omega_4 = -\left(3 + \frac{1+c_2^2}{18(1+c_1^2)}\right)(c_1-c_2) \tag{29}$$

Les coefficients qui restent peuvent aussi être calculés, sauf ρ_{51}, indéterminé (parce que le système n'est pas de dimension finie). Annuler c_1-c_2 dans l'expression de ρ_{11}, ρ_{31}, ρ_{33} donnée par (24), (28), et (25) confirme a_2 donné par (3.2.3.$6).

Quoi de neuf par rapport au modèle de Landau (3.3.1.$8)?

• Sur R: le signe négatif de ρ_{33}/ρ_{11} montre que la forme sinusoïdale de R **s'aplatit** autour de $z = 0$ quand ε croît.

• Sur la pulsation complète ω, tenant compte désormais de tous les modes:

$$\omega = c_0-c_1 + \varepsilon^2\, 2(c_1-c_2) - \varepsilon^4\left(3 + \frac{1+c_2^2}{18(1+c_1^2)}\right)(c_1-c_2) + O(\varepsilon^6) \tag{30}$$

En comparant ω et ω_1 donnée par (11):

$$\omega = \omega_1 - \varepsilon^4[(1+c_2^2) / (18(1+c_1^2))]\,(c_1-c_2) + O(\varepsilon^6) \tag{31}$$

Dans les expériences, les vortex sont émis avec une célérité non nulle; en conséquence, ω ne peut s'annuler. En accord avec la convention $c_0 > 0$ (§ 2.2.2.), $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, et, d'après (11), c_0-$c_1 > 0$. Pour Re et L_R donnés, la fréquence est maximum pour l'émission parallèle: (31) impose c_1-$c_2 > 0$. En résumé, je tire de ces arguments expérimentaux l'hypothèse

$$c_0 > c_1 > c_2 \tag{32}$$

• Sur q: comme c_1-$c_2 > 0$ et $\phi_{22} < 0$, Φ ou ϕ décroissent du centre vers les bords (à t donné). Comme ϕ est aussi une fonction croissante de t ($\omega > 0$), les bords, dont la phase est plus petite, sont **en retard** par rapport au centre. Ceci correspond à des vortex arqués vers les bouts de l'obstacle.

3.3.2. Solution loin du seuil

Les solutions ondes planes sont, dans un milieu infini:

$$A_q(t, z) = (1-q^2)^{1/2} \exp(i\,\omega_q\, t + i\, qz) \text{ avec } |q| < 1 \tag{1}$$

$$\omega_q = c_0 - c_2 - q^2 (c_1 - c_2) \tag{2}$$

A_0, onde plane parallèle, correspond à l'émission parallèle.

$A_{q\neq 0}$, onde plane oblique, correspond à l'émission oblique.

J'appelle "section d'onde plane" la restriction d'une onde plane à un certain intervalle. (2) est semblable à (3.3.1.$11), où on aurait remplacé q_1 par q. Dans les expériences, la pulsation associée à l'émission oblique ($q \neq 0$) est inférieure à la pulsation associée à l'émission parallèle (mais toujours positive), ce qui confirme (3.3.1.$32). Cette propriété s'appelle **dispersion non-linéaire**.

Une question se pose: quelle est la solution de GLCK0 pour L très grand? L'apparition d'ondes planes ne serait pas surprenante. Moins évidemment, l'onde plane parallèle, de pulsation $\omega_0 = c_0 - c_2$, n'est pas rétablie, parce qu'elle n'est pas compatible avec les conditions aux limites.

Une première étape est la solution du problème aux limites semi-infini:

$$R(t, 0) = 0 \tag{3}$$

$$R_z \to 0 \text{ et } q_z \to 0, \text{ pour tout t, quand } z \to \infty \tag{4}$$

ou, de même, A(t, z) loin du bout est une section d'onde plane. Remarquant qu'une solution analytique existe dans le cas particulier $c_1 = c_2$, Clavin (réf.) proposa de développer les inconnues (q(z), R(z), Ω) en puissances de $\varepsilon = c_1 - c_2$:

$$q(z) = q_0(z) + \varepsilon q_1(z) + \varepsilon^2 q_2(z) + O(\varepsilon^3) \tag{5}$$

$$R(z) = R_0(z) + \varepsilon R_1(z) + \varepsilon^2 R_2(z) + O(\varepsilon^3) \tag{6}$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + O(\varepsilon^3) \tag{7}$$

$$c_2 = c_1 - \varepsilon \tag{8}$$

Des combinaisons commodes de (3.2.1.$5) et (3.2.1.$6) sont (3.2.1.$7) et (3.2.1.$8). Les résultats, trouvés avec l'aide de Provansal, sont:

• A l'ordre 0:

$$\Omega_0 = 0 \tag{9}$$

$$R_{0zz} + R_0 - R_0^3 = 0 \tag{10}$$

$$R_0 = \mathrm{th}(z/\sqrt{2}) \tag{11}$$

• A l'ordre 1:

$$\Omega_1 = 0 \tag{12}$$

$$R_0^2(1 - R_0^2) = (1 + c_1^2)(q_1 R_0^2)_z$$

$$q_1 = (\sqrt{2}/3)\,(1/(1 + c_1^2))\, R_0 \tag{13}$$

$R_{1zz}+(1-3R_0^2)R_1 = (c_1/(1+c_1^2))\,(R_0-R_0^3)$

$R_1 = -(1/2\sqrt{2})\,(c_1/(1+c_1^2))\,z\,(1-R_0^2)$ (14)

• A l'ordre 2:

$\Omega_2 = 0$ (15)

$(1+c_1^2)(q_2R_0^2+2q_1R_0R_1)_z = 2R_0R_1(1-2R_0^2)$

$q_2 = (1/(3\sqrt{2}))\,(c_1/(1+c_1^2)^2)(-(\sqrt{2}/2)\,z\,(1-R_0^2) + R_0)$ (16)

$R_{2zz} + (1-3R_0^2)\,R_2 = (c_1/(1+c_1^2))\,(1-3R_0^2)\,R_1 + q_1^2R_0 + 3R_0R_1^2$

Quand $z \to \infty$, comme on s'y attendait, la solution est asymptotiquement une section d'onde plane, c'est à dire $q \to q_\infty$ et $R \to R_\infty$ avec

$$q_\infty = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{1+c_1^2}(c_1-c_2) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\frac{c_1}{(1+c_1^2)^2}(c_1-c_2)^2 + O((c_1-c_2)^3) \qquad (17)$$

$q_\infty^2 + R_\infty^2 = 1$ (18)

Cette section d'onde plane peut ne pas être stable. La valeur exacte de la pulsation décalée est

$\Omega = -\,q_\infty^2\,(c_1-c_2) = O(\varepsilon^3)$ (19)

La pulsation complète est

$\omega = c_0-c_2 + \Omega = c_0-c_2 - q_\infty^2\,(c_1-c_2)$ (20)

q_∞ est sélectionné par la condition à **la** limite $z = 0$, bien qu'on ne puisse l'observer que loin du bout. L'existence d'un bout a donc pour conséquence l'émission oblique.

Le cas d'une longueur L grande, mais finie, est résolu par simulation numérique.

3.3.3. Un exemple numérique avec $c_1 \neq c_2$ et L variable

Une suite de calculs numériques (NUM 02, NUM 03, NUM 04, NUM 05, NUM 06, NUM 07) permet la vérification des idées et formules des § 3.3.1. et § 3.3.2..

Quand L est grande, la situation près de chaque bout est identique à celle du cas semi-infini. Deux ondes obliques, de nombres d'ondes opposés, se rejoignent à mi-longueur ($z = 0$), par un processus de diffusion de phase (c.f. § A3.2.). Avec $\varepsilon = q_\infty^2$, $a = 0$, $b = 1$, (A3.2.$11) mène à

$q(z) \sim -q_\infty\,\mathrm{th}(\,[(c_1-c_2)/(1+c_1c_2)]\,q_\infty z\,)$ (1)

$$R(z) = 1 - \frac{q_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{1+c_1^2}{1+c_1c_2}\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{c_1-c_2}{1+c_1c_2}q_\infty z\right)\right) + O(q_\infty^4) \qquad (2)$$

La valeur maximum de R(0) donnée par (3.2.2.$1) est confirmée par (2). Elle peut être supérieure à 1. Je définis la largeur du choc de phase par

$$[(c_1-c_2)/(1+c_1c_2)]\, q_\infty\, \Delta z = 2 \qquad (3)$$

D'après (3.3.2.$17) à l'ordre 1 en c_1-c_2 :

$$\Delta z \sim 3\sqrt{2}\,\frac{(1+c_1c_2)\,(1+c_1^2)}{(c_1-c_2)^2} \qquad (4)$$

Si, de plus, $|c_1|$ est petit,

$$\Delta z \approx 3\sqrt{2}\,/\,(c_1-c_2)^2 \qquad (5)$$

On peut maintenant préciser que la solution est **hautement non-linéaire** quand

$$L \gg \Delta z(c_1, c_2) \qquad (6)$$

NUM 07 et NUM 06 sont un exemple numérique d'un tel cas, avec, de plus, c_1-c_2 petit.

L'équation de **diffusion de phase** (A3.2.$9), qui gouverne le sillage loin des bouts quand (6) est vérifiée, est invariante sous une quelconque translation d'espace. C'est pourquoi la position du choc de phase est marginalement stable (translater le choc de phase produit un état dissymétrique stationnaire). Cependant, cet équilibre indifférent est seulement une approximation: on néglige l'effet (répulsif) des bouts sur le choc de phase, qui se trouve en fait dans la situation d'une boule au fond d'un puits de potentiel très plat: écartée de sa position d'équilibre, elle revient très lentement, voire pas du tout, en présence de frottement solide. Pour les calculs numériques, les erreurs d'arrondi jouent, peut-être, le rôle du frottement solide; pour les expériences la question importe peu, car de petites non-uniformités sont toujours présentes, et prépondérantes. Bref, la position du choc de phase est pratiquement indéterminée, sans que cela soit en contradiction avec l'unicité de la solution t-sinusoidale du modèle GLCK0.

Il est aisé de vérifier que la solution asymptotique de GLCK1 (conditions aux limites périodiques) est l'onde plane parallèle, correspondant à l'émission parallèle. Cette remarque prouve que, si la solution de GLCK0 n'est pas uniforme, c'est bien à cause des conditions aux limites nulles.

3.4. Régime transitoire (à partir de bruit)

Le transitoire démarrant sur du bruit, décrit par Albarède, Provansal et Boyer (réf.), montre la croissance saturée de trois sections d'onde plane: une section d'onde plane parallèle, et deux sections d'onde oblique, de nombres d'onde opposés, **envahissent** l'ensemble de l'intervalle (c.f. HT 01, HT 02, DRA 04, NUM 08, NUM 09, NUM 10, NUM 11, NUM 12, NUM 13). Après le premier stade "Landau" du transitoire, $R \approx 1$ et, sauf près des bouts, la solution est gouvernée par l'équation de diffusion de phase (A3.2.$9). Les trois sections d'onde plane se raccordent progressivement en deux chocs de phase, émis par les bouts, et en mouvement vers le centre à la vitesse

$$v_i = q_\infty(c_1 - c_2) \qquad (1)$$

La collision des chocs de phase conduit enfin à l'état asymptotique t-sinusoïdal. D'après (3.3.2.$17) au premier ordre, la durée du transitoire est

$$L/(2v_i) \sim \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{1+c_1^2}{(c_1-c_1)^2}L \qquad (2)$$

Puisque le nombre d'onde oblique n'est évidemment pas affecté par la collision, il est le même que dans le cas semi-infini, résolu au § 3.3.2., à condition que (3.3.3.$6) soit vérifiée.

4. L'expérience et la solution t-sinusoidale du modèle GLC0

Détermination expérimentale des coefficients μ_r, c_1 et c_2.

4.1. Expériences près du seuil

Mathis, Provansal, Boyer (réf.) ont donné la vérification expérimentale d'une équation de Landau. Bien sûr, leur appareillage n'était pas conçu pour observer l'écoulement 2D. La variation suivant z du module de l'amplitude, trouvée par Mathis, Provansal, Boyer (réf. 2) est celle de la fonction propre S_1, ce qui veut dire que la longueur de Kuramoto de l'obstacle n'est pas très supérieure à π. Leur équation de Landau, (2.2.2.$2), n'est certainement pas (2.2.2.$5), mais (3.3.1.$8). Sans le changement d'échelles de Kuramoto, (2.3.$1), (3.3.1.$7) et (3.3.1.$8) conduisent à une version révisée de leur modèle:

$$v(Re, t, x = 5d, 0, z) = \mathrm{real}(\ A_1(t) \sin(q_1(z+L/2))\ f(0)\ ) \text{ avec } q_1 = \pi/L \qquad (1)$$

$$d_t A_1 = (\sigma_r - \mu_r q_1^2 + i(\sigma_i - \mu_i q_1^2))\ A_1 - (3/4)\ (l_r + il_i)\ |A_1|^2 A_1 \qquad (2)$$

(En fait, avec les notations du § 2.2.2., $\sigma' = \sigma - \mu q_1^2$.)

La composante y de f(0) est prise égale à 1, si bien que

$$v_y(Re, t, 5d, 0, z) = \mathrm{real}(\ A_1(t) \sin(q_1(z+L/2))\ ) \text{ avec } q_1 = \pi/L \qquad (3)$$

4.1.1. Détermination de σ_r, μ_r

Les résultats expérimentaux de Mathis, Provansal, Boyer (réf.) et Strykowski (réf.) conduisent à:

$$\sigma_r - \mu_r q_1^2 = k\ (Re - Re_1) \text{ où } k = (0.20 \pm 0.02)\ \nu/d^2 \text{ pour } Re < 60 \text{ au moins} \qquad (1)$$

Re_1 est le nombre de Reynolds critique, fonction de $q_1 = \pi/L$. Identiquement:

$$\sigma_r = k\ (Re - (Re_1 - k^{-1}\ \mu_r q_1^2))$$

$(Re_1 - k^{-1}\ \mu_r q_1^2)$ est indépendant de L, car l'analyse dimensionnelle montre que $\sigma_r d^2/\nu$ est une fonction de Re seul; donc,

$$\sigma_r = k\ (Re - Re_0)$$

$$Re_1 = Re_0 + k^{-1}\ \mu_r q_1^2 \qquad (2)$$

Avec les données de Mathis (réf.), reprises par EXP 01, je vérifie la relation (2) sur EXP 02 et EXP 03. L'appareillage expérimental fut décrit par Mathis (réf.), Provansal (réf.). La longueur de l'obstacle était constante (10 cm), mais le diamètre variable. D'après EXP 02,

$k^{-1}\ \mu_r = 193\ d^2$ ou $\mu_r = 39\ \nu$ (3)

J'ai réalisé un autre test à d constant et L variable. D'après EXP 04, $\mu_r = 24\ \nu$. Pour EXP 05, chaque seuil fut déterminé par l'extrapolation de la relation linéaire énergie-Re, et il en résulte

$\mu_r = 32\ \nu$, pour $Re < 53$ (4)

Les expériences décrites par EXP 01 et EXP 04 diffèrent par l'épaisseur de leurs EPBLs, leurs effets de blocage, etc. Ceci peut expliquer la différence entre les valeurs respectives de μ_r. Je garde la valeur (4), cohérente avec la plupart des expériences décrites plus bas. μ_r semble indépendant de Re.

La longueur de Kuramoto (c.f. §3.2.) prend la forme très simple

$$L_K = L\sqrt{\frac{k(Re-Re_0)}{\mu_r}} = L_R\sqrt{\frac{k_R(Re-Re_0)}{\mu_{rR}}}$$

4.1.2. Détermination de c_2

Strykowski (réf.) trouva

$c_2 = -3.0$ (1)

alors qu'un résultat de Provansal, Mathis, Boyer (réf.), exprimé dans le présent contexte, se ramène à

$|c_2| \ll k^{-1} d\sigma_i/dRe \approx 3$ (2)

Ce résultat est inexact. Toutes les autres expériences connues confirment le résultat de Strykowski.

Provansal (réf. 2) suivit l'évolution de l'énergie et de la fréquence dans des transitoires provoqués par une variation instantanée de la vitesse amont. Pendant le transitoire,

$2\pi f = \sigma_i - l_i R^2 = \sigma_i - kc_2 (Re-Re_0) R_K^2$, avec $R_K = R/R_{sat}$ et $R_{sat}^2 = \sigma_r / l_r$ (3)

Appliquer cette relation aux diagrammes EXP 06, EXP 07, EXP 08 mène respectivement à:

$c_2 = -3.3, -2.8, -1.9$

et je garde, sans préjuger de la dépendance $c_2(Re)$,

$c_2 = -2.7 \pm 0.7$ (4)

Le signe négatif de c_2 apparaît dans les simulations de Navier-Stokes 2D, par Braza, Chassaing, Ha Minh (réf.) ou Lecointe et Piquet (réf.).

Pour être plus complet, je calcule la valeur de l_r résultant des données de

Mathis (réf.). D'après (4.1.\$3):

$v_y(Re, t, 5d, 0, 0) = real(A(Re, t))$ (5)

Les cylindres avec $d \leq 0.7$ cm et $L = 10$ cm obéissent à

$|A| = (0.11 \pm .02)\ (Re - Re_1)^{1/2}\ \nu/d$ (6)

Donc,

$(0.11\ \nu/d)^2 = (4/3)\ k/l_r$ (7)

$l_r = (25 \pm 8)\ \nu^{-1}$ (8)

A dire vrai, pour $d > 0.8$ cm, on obtient un l_r beaucoup plus petit, pour des raisons indéterminées.

4.1.3. Détermination de c_1-c_2

Une première catégorie d'expériences permet la détermination de c_1-c_2, à partir de la pulsation quasi-linéaire du mode (S_1, σ_1), prévue par (4.1.\$2):

$\omega_1(Re, q_1^2) = \sigma_i(Re) - \mu_i\, q_1^2 - c_2\, (\sigma_r(Re) - \mu_r\, q_1^2)$ (1)

c_1-c_2 est déduit de la variation de $\omega_1 = 2\pi f_1$, non avec Re, mais avec le rapport d'aspect $L_R = L/d$ (en fait, $q_{1R}^2 = (\pi/L_R)^2$):

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1^2} = -\frac{\mu_r\,(c_1 - c_2)}{2\pi} \tag{2}$$

En utilisant EXP 09, puis (4.1.1.\$4), il vient

$\mu_r\,(c_1 - c_2)\,/\,(2\pi) = 14\ \nu$ (3)

$c_1 - c_2 = 2.7$ à $Re = 55$ (4)

La variation d'énergie suivant z est donnée par $S_1(z)^2$.

En dessous de $Re_m = 57$, le champ de vitesse demeure t-périodique jusqu'à plus de trois fois la longueur critique, conformément au modèle GLCK0. A plus grand Re, cependant, une **seconde fréquence** est possible: ce point fait l'objet du § 5.1..

4.1.4. Mesure directe de c_1

Une autre expérience donne un accès direct à c_1: j'appelle $\omega_{1c} = 2\pi f_{1c}$ la valeur de ω_1 au seuil Re_1. Il est à remarquer que la pulsation critique n'est **pas affectée** par les effets non-linéaires, i. e. ne dépend pas de c_2.

$$\omega_{1c}(q_1{}^2) = \omega_1(Re_1(q_1{}^2), q_1{}^2) = \sigma_i(Re_1(q_1{}^2)) - \mu_i q_1{}^2 \tag{1}$$

En négligeant la dépendance $\mu_i(Re)$, et en utilisant (1) et (4.1.1.$2):

$$\mu_i/2\pi = - df_{1c}/dq_1{}^2 + k^{-1}\mu_r \gamma \tag{2}$$

$$\text{où } 2\pi\gamma \equiv d\sigma_i/dRe \tag{3}$$

D'après EXP 10, $df_{1c}/dq_1{}^2 = 20.9\ \nu$. La valeur $\gamma = 0.16$ donnée par Provansal, Mathis, Boyer (réf.) est inutilisable, car elle est affectée de la même incertitude que (4.1.2.$2). Il ne reste que la valeur de Strykowski (Strykowski (réf.)), qui donne $c_1 = \mu_i / \mu_r$; puis c_2, grâce à (4.1.3.$4):

γ	+0.11
c_1	-0.65
$c_1 + 2.7 \approx c_2$	-3.35

c_2 trouvé est compatible avec (4.1.2.$1) et (4.1.2.$4).

γ peut aussi être éliminé comme suit. Je définis

$$\omega_0(Re) \equiv \omega_1(Re, 0) \tag{4}$$

Alors, en négligeant la dépendance $c_2(Re)$,

$$d\omega_0/dRe = 2\pi\gamma - c_2 k \tag{5}$$

Eliminer γ entre (2) et (5) donne un nouvel accès à c_1-c_2:

$$c_1 - c_2 = 2\pi\,(\mu_r{}^{-1}\, df_{1c}/dq_1{}^2 - k^{-1} df_0/dRe) \tag{6}$$

ω_0 est en réalité la pulsation du sillage plan. D'après Williamson (réf. 2),

$$df_0/dRe = Ro_1\ \nu/d^2 = 0.2175\ \nu/d^2 \tag{7}$$

Le résultat est, encore, $c_1 - c_2 = 2.7$.

4.2. Expériences loin du seuil

Parce que la longueur de Kuramoto est très supérieure à π, l'équation de Landau (4.1.$2) n'est plus valable, mais un effet collectif se produit: des sections d'ondes planes se forment. Comme le remarquèrent pour la première fois Albarède, Provansal, Boyer (réf.), la solution du modèle GLCK0, y compris le transitoire, et les expériences de Williamson au dessus de $Re_W = 64$ sont qualitativement identiques (sauf pour l'existence des cellules de bout, point traité au § 5.1.). Dans les deux cas, l'émission oblique de vortex provient des conditions aux limites. Williamson remarque la symétrie du champ de vortex par rapport à la ligne de chocs de phase entre la zone d'émission parallèle (section d'onde plane 0) et la zone d'émission oblique (section d'onde plane 1). J'appelle cette propriété "loi de symétrie". DRA 04 illustre la situation. Une relation entre x et t est introduite par l'intermédiaire d'une **célérité** c, ce qui veut dire simplement

$v(t, x, y, z) \approx v(t-(x-5d)/c, 5d, y, z)$ (pour $x > 5d$) (1)

Cette relation **ne fait pas partie du modèle GL**. Elle sert seulement à l'exploitation des résultats de Williamson. Le problème sous-jacent du traitement de la coordonnée x et une démonstration de la loi de symétrie sont exposés en appendice A2.

J'exprime maintenant la loi de symétrie dans le contexte de l'équation GLCK (3.1.$3). La section d'onde plane 1, de nombre d'onde q, a pour pulsation

$$\omega_K = c_0 - c_2 - q_K^2 (c_1 - c_2) \quad (2)$$

La section d'onde plane 0, de nombre d'onde zéro, a pour pulsation

$$\omega_{0K} = c_0 - c_2 \quad (3)$$

La loi de symétrie implique l'égalité des vecteurs d'onde (x, z) (c.f. DRA 04):

$$(\omega_{0K}/c_K)^2 = (\omega_K/c_K)^2 + q_K^2 \quad (4)$$

Imposer l'identité de (2) et (4) pour les **petits** nombres d'ondes conduit à

$$c_1 - c_2 = (1/2)\, c_K^2/\omega_{0K} \quad (5)$$

Après introduction des échelles de Kuramoto (3.1.$2), de $\omega_0 = 2\pi f_0$ et $c = f_0 \lambda_0$:

$$c_1 - c_2 = \frac{\lambda_0^2 f_0}{4\pi\mu_r} = \frac{\lambda_{0R}^2 f_{0R}}{4\pi\mu_{rR}} = \frac{\lambda_{0R}}{4\pi\mu_{rR}} \frac{c}{V_\infty} Re \quad (6)$$

Typiquement, $\lambda_{0R} \approx 5$, $\mu_{rR} = 32$, $c/V_\infty \approx 1$ et ces quantités sont grossièrement indépendantes de Re, d'où

$$d_{Re}(c_1 - c_2) \approx 10^{-2} \quad (7)$$

Donc, (c_1, c_2) varie avec Re, bien que cette variation ait pu être négligée sans encombres au § 4.1.4.. $\lambda_0^2 f_0$, tiré des données de Williamson, est porté sur EXP 11, et confirme (7). A Re = 60, $c_1 - c_2 \approx 340 / (4\pi 32) \approx 0.8$, hélas bien plus petit que les valeurs de § 4.1.3. et § 4.1.4..

La longueur d'onde suivant x et les angles mesurés par Williamson, associés à la loi de symétrie, permettent la détermination du nombre d'onde sélectionné q pour tout Re:

$$q = (2\pi/\lambda_0) \sin\theta \quad (8)$$

La longueur de l'obstacle est très supérieure à celle du choc de phase: la relation (3.3.3.$6) est valable et $q_K = q_{K\infty}(c_1, c_2)$ de (3.3.2.$17). Les valeurs de q_R et q_K déduites des expériences sont portées sur EXP 18 et EXP 19 (pour l'instant, seule la partie Re > Re_W est concernée).

q_K est une fonction de Re seulement, et non du rayon de la plaque de bout F. L'épaisseur δ des EPBLs n'a pas d'effet sur le nombre d'onde, alors que le modèle GLVK0, incluant des EPBLs, prédit que q_∞ est fonction de (c_1, c_2, δ). Paradoxalement, les expériences s'accordent mieux avec le modèle GLCK0, moins réaliste, où q_∞ est fonction de (c_1, c_2), lui-même une fonction de Re. En voici l'explication physique: la condition A = 0 est imposée aux nœuds des cellules de bout, toujours présentes chez Williamson (pas dans GLVK0 cependant, mais c'est une autre histoire). Ce nœud est-il à l'extérieur ou à l'intérieur de la couche limite? A Re = 150, Gerich et Eckelmann (réf.) mesurèrent la distance Δ entre le nœud et la plaque de bout, en fonction de F. Au même Re, l'épaisseur de l'EPBL, donnée par (5.1.3.$2), est $\delta_R \approx 0.4\, F_R^{1/2}$. Très clairement, pour toutes la gamme de F explorée par Gerich et Eckelmann, $\Delta(F) > 2\,\delta(F)$. Le nœud est **à l'extérieur** de l'EPBL, et joue le rôle d'écran entre le sillage et l'EPBL! (c.f. § 2.3.). Bien sûr cette situation devrait être vérifiée pour tout Re.

L'effet de la variation de (c_1, c_2) sur la solution de GLCK0 est étudié numériquement. Le plan (c_1, c_2) est divisé en deux régions, représentées sur NUM 14. Une d'elle, la région instable, a des solutions asymptotiques non t-périodiques pour L suffisamment grand, et son étude fait l'objet du § 5.2.. La région complémentaire, appelée région stable, montre le chevron (stable) du § 3.3.2., avec, apparemment, $q_{\infty K}$ plus petit que 0.55 sur la frontière. Dans les expériences, les états t-quasi-périodiques et t-périodiques sont obtenus respectivement pour Re < Re_W et Re > Re_W (cellules de bout mises à part). Ainsi, (c_1, c_2)(Re > Re_W) se trouve dans la région stable, et (c_1, c_2)(Re < Re_W) dans la région instable. Un déplacement vers la région instable se traduit par un accroissement de $q_{\infty K}$, dans les expériences (EXP 19) autant que dans les simulations numériques de GLCK0 (NUM 23).

Remarque: les paramètres L_K et c_0 dépendent aussi de Re. Mais la variation de L_K est sans effet **dans la région stable**, tant que (3.3.3.$6) tient, et (3.1.$1) montre qu'une variation de c_0 se traduit par un simple décalage de pulsation.

5. Fluctuation temporelles quasi-périodiques

5.1. Le mode impair et les cellules de bout

5.1.1. Fluctuations t-quasi-périodiques à petite longueur de Kuramoto

Mathis (réf.) et Mathis, Provansal, Boyer (réf. 2) observèrent un deuxième mode pour $Re > Re_2 > Re_1$, révélant la fonction propre S_2 du problème linéarisé (3.3.1.\$3). De plus, EXP 13 montre que Re_2 vérifie

$$Re_2 = Re_0 + k^{-1}\,\mu_r\, q_2^2,\; q_2 = 2\pi/L \qquad (1)$$

avec $Re_0 = 48.7$ et $\mu_r = 42\ \nu$ (au lieu de $Re_0 = 49.7$ et $\mu_r = 39\ \nu$ sur le premier mode dans des conditions identiques).

J'ai mené des expériences à Re constant et L variable, qui montrent la relation approchée entre longueurs critiques

$$L_2 = 2\, L_1 \qquad (2)$$

(4.1.1.\$2), (1) et (2) correspondent aux conditions de stabilité marginale des modes (S_1, σ_1) et (S_2, σ_2): $\mathrm{real}(\sigma_n) = 0$, $n = 1, 2$, i.e.

$$q_n^2 = k\,\mu_r^{-1}(Re_n - Re_0),\; n = 1, 2 \qquad (3)$$

Cette relation est confrontée à l'expérience sur EXP 14. L'accord n'est pas parfait, peut-être parce que les seuils ne furent pas déterminés au mieux, c'est à dire par extrapolation du zéro de la relation Re-énergie.

Si on revient au cas L_R = constante, on obtient la relation théorique:

$$Re_2 - Re_0 = 4\,(Re_1 - Re_0) \qquad (4)$$

Avec les données de Mathis, on peut porter Re_2 vs. Re_1, mais l'accord avec (4) est médiocre.

La pulsation au seuil du deuxième mode ω_{2c} peut être comparée à la pulsation linéaire $\mathrm{imag}(\sigma_2)$ du mode (S_2, σ_2). Un petit calcul à $L = 2\, L_1$ donne:

$$\omega_1 - \mathrm{imag}(\sigma_2) = (3/4)\,(c_1 - c_2)\,\sigma_r \qquad (5)$$

Deux expériences distinctes à Re = 68 et Re = 70 (c.f. EXP 16) donnent

$\omega_1 - \omega_{2c} < 2\pi \times 0.4\ \sigma_r$ alors que

$\omega_1 - \mathrm{imag}(\sigma_2) = (3/4) \times 2.7 \times 0.2 \times (70-49) = 2\pi \times 1.4\ \sigma_r$

L'écart entre ω_{2c} et $\mathrm{imag}(\sigma_2)$ résulte-t-il de l'interaction non-linéaire entre les deux modes? GLCK0 rend compte de cette interaction, par (3.3.1.\$13) et

(3.3.1.$14), mais prévoit l'amortissement non-linéaire du deuxième mode par le premier (§ 3.3.1.), en contradiction avec la plupart des expériences, où $A_2 \neq 0$.

Une autre propriété du mode (S_2, σ_2) peut être testée sur le deuxième mode: puisque S_2 change de signe en z = 0, un nœud avec opposition de phase doit apparaître à cet endroit. Gerich (réf.) a publié une visualisation montrant l'opposition de phase pour tout x (à t donné), et m'a confirmé l'opposition de phase aussi pour tout t. Comme $S_1(z)$ est **paire** et $S_2(z)$ **impaire**, le premier et deuxième modes seront appelés désormais modes pair et impair. La fig. c de Gerich (réf.) montre le mode impair avec $L_K \approx 3.5\ \pi$ (basée sur $\mu_r = 32\ \nu$, k = 0.2 d^2/ν, $Re_0 = 49$). Le mode pair est visible sur la fig. d, où $L_K \approx 2.2\ \pi$, ce qui est compatible, en autorisant une marge d'erreur, avec la relation attendue, $L_K < 2\ \pi$.

Simulation numérique

Ces expériences sont quasi-linéaires ($2\pi < L_K < 10$). Avec du bruit aléatoire pour condition initiale, le mode (S_2, σ_2) n'apparaît dans GLCK0; par contre, forcé dans les conditions initiales, il croît effectivement comme prévu par la théorie linéaire, tant que le mode (S_1, σ_1), parti seulement sur le bruit numérique, reste négligeable. Mais le mode (S_1, σ_1), qui croît plus vite, finit par dominer et annihiler le mode (S_2, σ_2), confirmant la notion d'amortissement non-linéaire, et la contradiction entre le modèle GLC0 et l'existence du mode impair.

5.1.2. Evolution du mode impair au dessus du seuil

J'ai réalisé une expérience à Re = 70 et à L croissant depuis une longueur sous-critique. La variation de fréquence apparaît sur EXP 16, EXP 17. L'amplitude globale du mode impair croît rapidement au dessus du seuil, jusqu'à dépasser en module l'amplitude globale du mode pair, comme on voit sur EXP 15, où $L_K = 2.6\ \pi$. L'opposition de phase ne fut pas vérifiée, parce qu'une seule sonde était disponible; mais les fréquences à droite et à gauche (suivant z) étaient **rigoureusement** identiques (sinon, j'aurais détecté un battement à basse fréquence). Le mode pair est clairement **dominé** par le mode impair, comme (probablement) sur la fig. c de Gerich (Gerich (réf.)). Pour $L_K \approx 3\pi$, le mode impair se casse en cellules de bout, chacune demeurant attachée à un bout, avec des fréquences f_e et f_e' légèrement différentes (à cause d'une petite dissymétrie). Alors, le sillage exhibe un fort **mélange** non-linéaire de trois fréquences (déjà présenté dans Albarède (réf.)), avec un très puissant battement à basse fréquence $|f_e - f_e'|$.

Pour L plus grand, le mode pair regagne la prédominance spatiale hormis près des bouts (c.f. Gerich et Eckelmann (réf.) et Williamson (réf. 2) fig. 27). Les cellules de bout sont eloignées l'une de l'autre, n'interagissent pas, et sont indépendantes de L: encore une fois, l'effet de longueur finie, par un processus de saturation non-linéaire, devient l'effet de bout.

5.1.3. Relation entre le mode impair et la configuration au bout

Le mode impair dépend des EPBLs

L'existence du mode impair dépend du **fetch** F, distance le long de laquelle la couche limite a crû avant d'atteindre l'obstacle (fetch est un terme nautique - dont l'emploi est étendu ici à une couche limite-, désignant la distance sur laquelle le clapot se forme avant d'atteindre un obstacle). Avec F = 15 cm, L = 10 cm, d = 1.6 mm, le mode impair apparaît au-dessus de $Re_2 = 50$ (Mathis (réf.)). Avec F = 2 cm, L variable < 7 cm, d = 1.6 mm, le mode impair apparaît pour $Re_2 > Re_m = 57$. Incidemment, cette situation permet de vérifier (3.3.1.$11) même pour $L_K > 2\pi$, pourvu que $Re < Re_m$ (EXP 09). Au contraire, si $Re > Re_m$, le mode pair voit sa fréquence fortement affectée par le mode impair (EXP 17).

L'épaisseur δ de l'EPBL vérifie bien la loi de Blasius:

$$\delta/d \approx 5\,(F/d)^{1/2}\,Re^{-1/2} \tag{1}$$

$$\delta_K(Re, F) \approx 5\,(kF_R/\mu_r)^{1/2}\,((Re-Re_0)/Re)^{1/2} \quad (F_R \text{ est } F/d) \tag{2}$$

δ_K **croît** avec Re. Il se pourrait que l'EPBL supporte une cellule au dessus de Re_m, seulement si δ_K dépasse une taille critique.

En tous cas, l'écoulement près des bouts **stimule** le mode impair: sa limite quasi-linéaire, le mode (S_2, σ_2), comme il vient d'être montré, et, aussi, les cellules de bout, considérées comme la limite hautement non-linéaire du mode impair.

Echec de l'approximation faiblement 3D

La dernière remarque suggère l'introduction d'EPBLs symétriques dans le modèle GL0, par l'intermédiaire de $\sigma(Re(z))$. Le modèle GLV0 ainsi obtenu a une solution asymptotique **paire** (bien que pas forcément t-périodique). Un cisaillement uniforme de Re(z) ne produit pas non plus le mode impair.

A mon avis, le mode impair échappe au modèle GL0, parce que l'approximation faiblement 3D échoue près des bouts. L'écoulement n'y est pas faiblement 3D, on ne peut pas relier le sillage, même localement, au sillage plan, et les propriétés de stabilité ne peuvent pas être représentées par Re(z) et GL.

5.1.4. Conclusion pour le § 5.1.

Dans des conditions quasi-linéaires, le mode impair expérimental a le seuil et la forme du mode (S_2, σ_2); dans des conditions hautement non-linéaires, il prend la forme de cellules de bout. Dans le modèle GLCK0, le mode impair ne se trouve pas dans la solution asymptotique, parce qu'il est non-linéairement amorti par le mode pair.

Dans certaines expériences, le mode impair peut aussi être inhibé en réduisant le fetch F de l'EPBL. Ceci montre qu'il est contrôlé et alimenté par l'écoulement près des bouts, un problème de mécanique des fluides pleinement 3D, non compris dans le modèle GL, et qui requiert une étude séparée.

5.2. Une explication théorique de la transition de Williamson, à $Re_W = 64$

5.2.1. Franchissement de la limite de stabilité du chevron

La simulation numérique du modèle GLCK0 reproduit la transition de Williamson (Williamson (réf. 2)), par une variation de (c_1, c_2), déstabilisant le chevron. Une suite de simulations numériques retrace le franchissement de la limite de stabilité par (c_1, c_2). Conditions du test: $L = 48$, c_0 adapté (de manière à minimiser $|\omega|$), c_1 variable, $c_2 = -2$, $dt = 0.2$, pmax = 96 (c.f. § A4.2. pour des renseignements sur la méthode numérique). Les différents stades obtenus sont:

•i1: $c_1 = -0.500$ ($c_0 = -1.77$): un chevron stable.

•i2: $c_1 = -0.300$ ($c_0 = -1.59$): un chevron stable; des oscillations apparaissent pendant le transitoire, mais sont finalement amorties.

•i3: $c_1 = -0.175$ ($c_0 = -1.46$): un chevron oscillant; les oscillations acquièrent une amplitude finie (plus grande près du choc de phase), et des singularités de phase (dislocations) apparaissent pendant le transitoire.

•i4: $c_1 = -0.120$ ($c_0 = -1.41$): un chevron brisé, avec deux nœuds internes permanents; la cellule centrale et les cellules latérales ont des fréquences distinctes.

•i5: $c_1 = -0.100$ ($c_0 = -1.38$): sillage scindé. Les cellules centrale et latérales sont des chevrons, toutes de même fréquence. Deux cellules voisines, séparées par un nœud, sont en opposition de phase (accrochage répulsif).

Chaque stade du développement de l'instabilité (sauf le stade i1 bien connu déjà) est illustré par les représentations suivantes:

• Lignes real(A(t, z)exp(i 0.5 t)) = 0, simulant une visualisation de l'écoulement (HT 03, HT 04, HT 05, HT 06).

• Enregistrements t $\rightarrow$ R(t, z), mis pour des traces de vitesse (NUM 15, NUM 16, NUM 17, NUM 18).

• (q, R, ω)(z) à t donné, représentatif d'un état asymptotique symétrique (NUM 19, NUM 20, NUM 21, NUM 22).

• Dessin en tons de gris de real(A(t, z)), plus proche de la réalité mathématique, et montrant le développement des singularités de phase (HT 07, HT 10, HT 11, HT 12).

5.2.2. Comparaison avec la stabilité des ondes planes

L'analyse linéaire de la stabilité des ondes planes fut réalisée par Kuramoto (réf.). En voici un extrait (corrigé) :

1• Si $1+ c_1 c_2 < 0$, alors toutes les ondes planes sont instables, au moins vis à vis des perturbations à grande longueur d'onde.

2• Dans le cas contraire, les ondes planes telles que

$$|q| > q_{cl} = (1 + 2(1+c_2^2)/(1+c_1\, c_2))^{-1/2} \qquad (1)$$

sont linéairement instables vis à vis des perturbations à grande longueur d'onde. Les ondes planes de grand nombre d'onde, aussi bien que les chevrons de grand nombre d'onde, ont une tendance à l'instabilité. J'appelle onde plane tangente à un chevron donné l'onde plane de même nombre d'onde. Je veux comparer la stabilité du chevron avec celle de son onde plane tangente.

Pour chaque stade i1 à i5, je calcule q_{cl} donné par (1) et détermine numériquement le nombre d'onde sélectionné q_∞. Sauf au stade i1, $q_\infty > q_{cl}$: l'onde plane tangente devient donc instable entre les stades i1 et i2. Mais q_{cl} n'est pas très significatif, parce qu'il concerne la stabilité linéaire d'une onde plane soumise à des perturbations de grande longueur d'onde, alors que je suis intéressé par la stabilité non-linéaire d'une section d'onde plane, soumise à des perturbations de longueur d'onde finie (une perturbation z-sinusoïdale ne peut pas se développer si sa longueur d'onde est plus grande que L). Donc, j'étudie numériquement la stabilité des ondes planes (nombre d'onde q, longueur d'onde

λ), dans un milieu périodique de taille 2 λ (environ la longueur d'une section d'onde plane, en supposant un typique $q \approx 0.5$); la stabilité est obtenue pour $q < q_c$. Les trois quantités q_∞, q_{cl}, q_c sont portées en fonction de c_1 sur NUM 23. Le résultat confirme que l'instabilité du chevron diffère peu de l'instabilité de l'onde plane tangente, probablement sous l'effet stabilisant d'une longueur finie.

La stabilité quasi-linéaire de l'onde plane n'a pas été étudiée théoriquement. Mais le mode le plus instable semble gouverné par une équation de Landau (la troisième!), avec σ_r'', I_r''. La transition (chevron stable $\rightarrow$ chevron oscillant) correspond à σ_r'' devenant positif, tandis que la transition (chevron oscillant $\rightarrow$ chevron brisé) est une bifurcation sous-critique, se produisant quand l'amplitude d'oscillation est assez grande. Un exemple d'évolution temporelle d'une onde plane instable apparaît sur HT 21: la solution asymptotique est une autre onde plane (de nombre d'onde plus petit).

5.2.3. Effet de la variation du rapport d'aspect

Le chevron stable est indépendant du rapport d'aspect (supposé grand); cette propriété doit être testée sur le chevron brisé (stade i4). Par l'étude des exemples numériques, je suis parvenu au scénario suivant, valide au moins pour la plupart des (c_1, c_2) dans la région instable, pas trop loin de la limite de stabilité, ni des valeurs expérimentales.

En accord avec l'analyse de stabilité quasi-linéaire du § 3. et les expériences du § 4.1., la solution asymptotique de GLCK0 est t-périodique pour L assez petit; en conséquence, une longueur critique $L^{(2)}(c_1, c_2)$ existe, au dessous de laquelle les nœuds internes du chevron brisé disparaissent. Dans les exemples numériques, $L^{(2)}(c_1, c_2) \gg \Delta z(c_1, c_2)$, si bien que, pour L légèrement inférieur à $L^{(2)}$, la structure est un chevron oscillant. En utilisant la remarque du § 2.3., GLCK s'applique avec des conditions aux limites prises en des nœuds quelconques, en particulier, les nœuds internes. Donc, par exemple, la distance $L^{(1)}$ entre nœuds internes à $L = L^{(2)}$ vérifie

$$\pi \leq L^{(1)}{}_K(c_1, c_2) \leq L^{(2)}{}_K(c_1, c_2) - 2\pi \qquad (1)$$

Pendant que L croît, les cellules latérales gardent grossièrement la même longueur $(L^{(2)}-L^{(1)})/2$. La cellule centrale, de longueur $L-(L^{(2)}-L^{(1)})$, sature bientôt, produisant un chevron, lui-même instable quand sa longueur est supérieure à $L^{(2)}$; une cascade de "poupées russes" est amorcée. Pour $N \geq 3$, je définis $L^{(N)}$ comme la longueur au-dessus de laquelle le N-ième nœud avec $z > 0$ apparaît (y compris le nœud externe). J'obtiens, pour tout $N \geq 1$:

$$L^{(N+1)}-L^{(N)} = L^{(2)}-L^{(1)} \tag{2}$$

et par récurrence sur N:

$$L^{(N)}-L^{(1)} = (N-1)\,(L^{(2)}-L^{(1)}) \text{ pour } N \geq 1 \tag{3}$$

Si $L > \pi$, alors le nombre de nœuds (avec $z > 0$) est simplement

$$\mathcal{N}(L, c_1, c_2) = 1 + \mathrm{int}\left(\frac{L - L^{(1)}(c_1, c_2)}{L^{(2)}(c_1, c_2)-L^{(1)}(c_1, c_2)}\right) \tag{4}$$

Le cas $(c_1, c_2) = (-0.12, -2)$ est illustré par HT 05, HT 09, HT 11, HT 12, HT 13, HT 14, HT 15, HT 16, HT 17, HT 18, HT 19, HT 20. Quelques autres résultats utiles sont, avec $(c_0, c_1, c_2) = (-1.41, -0.12, -2)$, $dt = 0.2$, $dz = 0.5$:

$L^{(1)}_K \approx 13$, $33 < L^{(2)}_K < 36$, $60 < L^{(3)}_K < 96$, $\mathcal{N} = 6$ à $L_K = 240$

Pratiquement, si $L \approx L^{(3)}$, les nœuds internes ont des mouvements oscillatoires et disparaissent de manière intermittente, si bien que $L^{(3)}$ ne peut être déterminée précisément. La taille des cellules latérales n'est pas vraiment constante: les cellules latérales sont des chevrons dissymétriques, évoluant continûment lors de l'accroissement de L, depuis une section d'onde plane jusqu'à un chevron symétrique. Plus précisément, toutes les sections d'onde plane sont limitées à 10 unités de Kuramoto, alors que la longueur totale des cellules latérales est 10, 12, 16, 19 unités de Kuramoto pour $L_K = 33, 48, 60, 240$. En conséquence, les $L^{(N)}$ apparaissent sous-estimés par (4).

Mais cela ne remet pas en cause la conclusion qu'une variation de L_K, au même titre qu'une variation de (c_1, c_2), peut produire une variation de $\mathcal{N}$. Il faut regarder lequel de ces mécanismes est impliqué dans la transition de Williamson.

5.2.4. Comparaison avec les expériences

L variable, Re constant inférieur à Re_W

Williamson ne mentionne pas que le chevron brisé puisse être supprimé en diminuant la longueur, bien que cette propriété semble quasiment incontournable. Il ne mentionne pas non plus le sillage scindé (stade i5). Il observa seulement le chevron brisé (stade i4). Ceci est compatible avec le modèle GLCK0 si les expériences furent réalisées avec

$L^{(2)}{}_K[(c_1, c_2)(Re)] < L_K(Re) \ll L^{(3)}{}_K[(c_1, c_2)(Re)]$ (1)

dans un voisinage de Re_W (i.e. un intervalle]Re, Re'[contenant Re_W). La gamme de L_R utilisée par Williamson était

$70 < L_R < 240$

Avec $Re_W = 64$, $\mu_r = 32\ \nu$ et $Re_0 = 49$, $(\mu_r/\sigma_r)^{1/2} = 3.27$ d et la gamme de L_K est

$21 < L_K < 73$ (2)

L'observation d'un constant $\mathcal{N} = 2$ en dessous de Re_W implique

$L^{(2)}{}_K < 21 < 73 \ll L^{(3)}{}_K$ (3)

L_R constant, Re variable

Je considère une séquence d'expériences à L_R constant et Re décroissant, en passant par Re_W. Au dessus de Re_W, un chevron stable (stade i1 et stade i2) est observé. Le stade i3, pas facile à distinguer du chevron stable, n'est pas explicitement rapporté, malgré une ressemblance heureuse avec la fig. 7 de Williamson (réf. 2): dans les deux cas, l'amplitude de l'oscillation est plus forte près des chocs de phase, et les isophases de l'oscillation forment un nouveau chevron, pointant à l'opposé du chevron de base! En dessous de Re_W, le chevron brisé (stade i4) est observé.

La transition de Williamson consiste en une variation du nombre de nœuds, causée par une variation soit de L_K, soit de (c_1, c_2), comme remarqué au § 5.2.3.. Je vais examiner une hypothèse: "dans un voisinage de Re_W, (c_1, c_2) **reste** dans la région instable". Ceci exige que la transition soit due à une variation de L_K, plus précisément, au changement de signe de $L_K(Re) - L^{(2)}{}_K[(c_1, c_2)(Re)]$. Le seuil devrait dépendre de L_R et, comme L_K croît avec Re, le chevron brisé devrait être obtenu **au dessus** du seuil. Comme ces conclusions sont fausses, l'hypothèse est fausse.

Ainsi, $(c_1, c_2)(Re)$ passe de la région instable à la région stable quand Re croît. L_R est tel que (1) soit vraie, dans un voisinage de Re_W, heureusement assez vaste. Une méthode sensible pour déterminer $(c_1, c_2)(Re_W) = (c_{1W}, c_{2W})$ consiste à intersecter la limite de stabilité de NUM 14 et la droite $c_1 - c_2 = 2.7$ (obtenue au § 4.1.). En réalité, comme NUM 14 n'est pas numériquement très précis dans la zone de l'intersection, j'ai étudié séparément la ligne $c_1 - c_2 = 2.7$, avec une précision accrue: L = 48, c_0 adapté pour que $|\omega| < 0.01$, dt = 0.2, dz = 0.5, et j'obtiens

$-0.55 < c_{1W} < -0.5$ (4)

$-3.25 < c_{2w} < -3.2$ (5)

(4) et (5) sont effectivement peu éloignés des résultats du § 4.1.4..

Avec $(c_0, c_1, c_2) = (-2.3, -0.45, -3.2)$, le nombre d'onde sélectionné (obtenu pour $\pi \ll L_K \ll L^{(2)}{}_K$) est $q_\infty(-0.45, -3.2) = 0.57$, avec une pulsation $\omega = 0.007$. De plus,

$30 < L^{(2)}{}_K(-0.45, -3.2) < 33$ (6)

et $L^{(3)}$ ne peut pas être déterminée, parce que les nœuds internes fluctuent en nombre et en position. (6) est en désaccord avec $L^{(2)}{}_K < 21$ requis par (3).

6. Conclusion

6.1. Récapitulation

6.1.1. Solution du modèle GLCK0

L'étude mathématique de la solution a été présentée parallèlement à une analyse non-triviale des expériences, ce qui pourrait troubler un lecteur non-spécialiste. Je rappelle les résultats mathématiques, hors du contexte expérimental. Ils constituent le plus simple exemple d'analyse non-linéaire de la stabilité d'un système étendu.

Le modèle GLCK0 se compose de l'équation GLCK (3.1.$3) et de conditions aux limites nulles. Les trois paramètres extérieurs sont c_1, c_2, d'ordre unité, et L_K, longueur de l'intervalle de définition. L'unicité et l'existence d'une solution t-sinusoidale sont proposées; c'est une fonction paire de z, appelée pour cela mode pair.

La théorie usuelle de la stabilité quasi-linéaire est appliquée à GLCK0: on suppose un bruit aléatoire de petite amplitude à $t = 0$, et on recherche l'évolution temporelle. Le problème linéarisé est diagonal dans l'espace de Fourier; le nombre de modes linéairement instables est $\mathrm{int}(L_K/\pi)$. Pour $L_K \to \pi^+$, l'unique mode linéairement instable est régi par une équation de Landau, facilement déduite de GLCK.

Si $2\pi < L_K \ll L^{(2)}{}_K(c_1, c_2)$, les modes linéairement instables sont, selon leur parité, ou bien amortis ou bien accrochés par les effets non-linéaires; aucune nouvelle fréquence n'apparaît, et la solution asymptotique est le mode pair. Si $2\pi \ll L_K \ll L^{(2)}{}_K$, le mode pair est en forme de chevron: il se compose de deux sections symétriques d'onde plane oblique, de nombres d'ondes $\pm\, q_\infty(c_1, c_2)$ indépendants de L, reliées progressivement par un choc de phase symétrique et stationnaire. Pendant le transitoire, après une durée d'ordre unité, une section d'onde plane parallèle apparaît, sauf près des bouts, où apparaissent des sections d'onde plane oblique. Les zones de connexion sont des chocs de phase qui se déplacent vers le centre à la vitesse $q_\infty|c_1 - c_2|$, entrent en collision à mi-longueur, et établissent finalement le mode pair asymptotique.

Un quelconque (c_1, c_2) dans la région stable produit une solution asymptotique t-périodique pour tout L: $L^{(2)}(c_1, c_2) = \infty$. Inversement, un quelconque (c_1, c_2) dans la région instable produit une solution asymptotique non t-périodique pour un certain L: $L^{(2)}$ est finie (exemple: $L^{(2)}{}_K(-0.12, -2) < 36$). L'instabilité n'est pas très différente de celle de l'onde plane de nombre d'onde $q_\infty(c_1, c_2)$, et se développe quand q_∞ est trop grand. Quand $L \to L^{(2)-}$, le chevron oscille de plus en plus fort, et casse à $L = L^{(2)}$, où, par définition, deux nœuds internes apparaissent, distants de $L^{(1)}$. Entre eux, la cellule centrale développe un mode pair, dont la longueur croît avec L, jusqu'à $L^{(2)}$, où elle casse, et ainsi de suite: le même processus se répète indéfiniment. La région instable est grossièrement identique à, mais distincte de la région d'instabilité de diffusion de phase, $1 + c_1 c_2 < 0$.

L'effet de la variation de (c_1, c_2) à L constant peut facilement se déduire de ce qui précède: si L est supérieur à $L^{(2)}$ quand (c_1, c_2) entre dans la région instable, la transition se produit sur le champ: le chevron se casse en cellules plus petites. Il faut remplir la longueur de l'obstacle avec le plus grand nombre de cellules latérales, et la longueur restante, dans l'intervalle $[L^{(1)}, L^{(2)}]$, est occupée par la cellule centrale. Dans les exemples numériques, les cellules latérales sont des chevrons dissymétriques, de nombre d'onde q_∞ (presque partout sur la limite de stabilité, $q_\infty \approx 0.5$) et dont les sections d'onde plane ne dépassent pas une taille critique. La cellule centrale est symétrique.

6.1.2. Résultats expérimentaux

Une amplitude complexe peut être associée au sillage expérimental (par la définition (A1.$5), indépendamment de GL). La partie paire de A, notée $A_T(t, z)$, est le mode pair; la partie impaire, notée $A_{-T}(t, z)$, est le mode impair; l'indice T rappelle que $A_{\pm T}$ est invariante sous ±T, défini par (3.2.1.$21). Les deux modes sont t-sinusoïdaux, ce qui correspond à un champ de pression-vitesse t-périodique, et peuvent s'écrire

$$A_{\pm T}(t, z) = R_{\pm T}(z) \exp[\, i \int_0^z q_{\pm T}(z')dz' + i\omega_{\pm T} t\,] \qquad (1)$$

Pour L croissant, chaque mode présente successivement des

- Propriétés linéaires: taux de croissance, seuil, pulsation linéaire, forme.
- Propriétés quasi-linéaires: amplitude globale et pulsation à saturation, sans distorsion notable de la forme.
- Propriétés hautement non-linéaires: la forme et la pulsation ont des limites

hautement non-linéaires quand $L \to \infty$.

Le mode pair

Un accord quantitatif est prouvé entre les approximations du § 3.3.1. et les expériences du § 4.1.. Le mode pair près du seuil est le mode (S_1, σ_1). Cette structure, certes pas très exotique, est cependant utile:

• Elle légitime le modèle GLCK0, en particulier l'opérateur $\partial_z{}^2$.

• Elle donne accès à (c_1, c_2).

Propriétés hautement non-linéaires: un accord qualitatif est obtenu entre, d'une part, l'approximation loin du seuil du § 3.3.2., le transitoire du § 3.4., l'instabilité du § 5.2., et, d'autre part, les expériences de Williamson. On n'obtient pas d'accord quantitatif: c_1-c_2 est sous-évalué par (4.2.$6), q_K surévalué par EXP 19, (5.2.4.$3) et (5.2.4.$6) imposent des conditions contradictoires sur $L^{(2)}{}_K$. Mais de nouvelles expériences, conçues à dessein, sont nécessaires pour tirer au clair ces problèmes.

Le mode impair

Le modèle GLCK0 prédit certaines propriétés linéaires (seuil et forme) du mode impair, mises à jour par les expériences du § 5.1.: quand $L_K \to 2\pi^+$, $A_{-T}(t, z) \sim A_2(t)\, S_2(z)$, avec un nœud à $z = 0$. Dans la plupart des expériences, l'amplitude globale A_2 est clairement non-nulle, alors que le modèle GLCK0 prédit $A_2 = 0$.

Quand $L \to \infty$, A_{-T} tend vers des cellules de bouts: $R_2(z)$, s'aplatissant autour du nœud central, est négligeable sauf aux bouts. Les ailes du mode impair, fort éloignées l'une de l'autre, se désynchronisent sous l'effet d'une petite dissymétrie, et engendrent des cellules incohérentes. Encore une fois, le modèle GLCK0 prédit $A_{-T} = 0$.

Dans certaines expériences, cependant, le mode impair peut être supprimé (pour $Re < Re_m$) en réduisant le fetch (distance entre le bord amont de la plaque de bout et l'obstacle). Cette propriété montre que l'existence du mode impair est due à l'écoulement près des bouts, qui échappe au modèle GL, parce qu'il n'est pas faiblement 3D et ne peut être approché par un champ de sillages plans locaux.

L'écoulement pleinement 3D près d'un nœuds

Près d'un nœud, le champ de vitesse fluctuant, avant de s'annuler, devient pleinement 3D et ne peut pas être déterminé par le modèle GL; en particulier, les vortex d'une allée rejoignent les vortex de l'autre allée. Le champ de vorticité obéit à $\nabla.\omega(t, \mathbf{r}) = 0$, alors que cette relation n'a pas d'équivalent pour $A(t, z)$.

Heureusement, le modèle GLCK0 reproduit l'effet des nœuds externes à grande distance, et rend compte du chevron brisé. Ainsi, les effets faiblement 3D sont prédits, même si les détails pleinement 3D près des nœuds sont perdus. On pourrait objecter que les nœuds des cellules de bout n'apparaissent pas dans le modèle GL0; la raison n'en est probablement pas tant l'impossibilité de traiter la complexité 3D de cet écoulement, mais, plus trivialement, le fait que GL ne tienne pas compte des propriétés de stabilité particulières de l'écoulement près des bouts.

6.1.3. Conclusion historique (références à d'autres articles)

L'idée initiale de Tritton à propos de deux régimes d'émission pour le sillage plan était fausse. La quasi-périodicité est toujours le signe d'une structure 3D en cellules, avec des dislocations. Gaster (réf.) eut le premier l'idée de modéliser le sillage par un champ d'oscillateurs (de Van der Pol) couplés, mais il ne poussa pas cette idée très loin.

Il manqua aussi l'effet de bout, sur lequel insistèrent les premiers Slaouti et Gerrard (réf.), Gerich et Eckelmann (réf.), qui inaugurèrent une nouvelle attitude expérimentale: auparavant, certains aspects du problème étaient passés sous silence, sous des prétextes fallacieux: par exemple, avec un rapport d'aspect "très grand", on considérait comme acquis que l'écoulement était 2D; après leurs travaux, il était clair qu'aucun détail de l'écoulement ne pouvait être négligé a priori, et que les conceptions 2D devaient être définitivement abandonnées.

Van Atta et Gharib utilisèrent un obstacle de très grand rapport d'aspect (L_R = 3500), mais, comme ils ne s'inquiétèrent pas de la structure 3D, il est difficile de conclure à propos de leur suggestion, citée au § 1.1..

Williamson prouva que de substantiels effets 3D demeuraient en l'absence de non-uniformités ou de vibrations: ils résultaient seulement de l'annulation des oscillations aux bouts. Cette situation était particulièrement propice au présent travail, car le nombre de paramètres mathématiques extérieurs put être réduit à un minimum (trois), alors que les effets 3D demeuraient non-triviaux.

Des équations d'amplitudes furent largement utilisées pour décrire les écoulements fermés, principalement la convection thermique, et l'écoulement de couette rotatif. En général, les écoulements ouverts internes (Poiseuille-tube ou Poiseuille-plan) ont des transitions sous-critiques, qui échappent aux équations d'amplitude. Au contraire, les écoulements ouverts externes ont souvent des transitions super-critiques. Les écoulements absolument instables méritent une attention particulière: ils sont gouvernés par des équations autonomes, et l'instabilité est largement indépendante du bruit venant de l'amont. Un autre exemple est le jet chaud, qui, curieusement, a presque la même constante c_2 que le sillage du cylindre (Raghu et Monkewitz (réf.)).

La littérature sur les expériences de sillage et la réduction dynamique des instabilités hydrodynamiques est si vaste que je manque certainement nombre d'articles révélateurs (en particulier sur le second sujet).

6.2. Prospectives

6.2.1. Applications nouvelles du modèle GL

<u>Autres effets dans un écoulement uniforme</u>

• Obstacle incliné: d'après Ramberg (réf.), l'inclinaison accroît q_∞ et produit une transition qui ressemble à l'instabilité d'onde plane de HT 21.

• Forçage par des vibrations (Detemple-Laacke (réf.)).

• Instabilité de l'écoulement de base 2D pour Re > 180: des conditions aux limites périodiques peuvent être utilisées pour simuler un milieu infini. GL peut être modifiée pour que le premier mode instable ait un nombre d'onde non nul.

<u>Ecoulements non-uniformes</u>

L'équation GL (2.3.$2) s'applique aux écoulements faiblement 3D: par exemple, le sillage d'un cône effilé (Gaster (réf. 2)), le sillage d'un corps de révolution avec une variation périodique du diamètre d(z) (par analogie avec le sillage d'une plaque plane ondulée, étudié par Meiburg et Lasheras (réf.)), etc.

Même quand le modèle GL est a priori inapplicable, il peut donner des idées utiles. Par exemple, introduire des profils d'EPBL dans GLV0 cause en général un accroissement de q_∞, et un déclenchement plus facile de l'instabilité du chevron. Un autre exemple est le sillage d'un "bi-cylindre" (un corps de révolution avec une discontinuité de diamètre).

6.2.2. Avancées théoriques

"Vers l'amont": dérivation de l'équation d'amplitude

Les coordonnées lentes du sillage 3D sont x (écoulement quasi-parallèle) et z (écoulement faiblement 3D). Supposer le problème 2D revient à geler la variation suivant z; alors, les propriétés de stabilité locales et globale sont reliées par une équation d'amplitude, avec ∂_x, étudiée par Chomaz, Huerre, Redekopp (réf.). Il devrait être possible, aussi bien, de geler la variation suivant x en supposant un écoulement parallèle, et ensuite de relier les propriétés de stabilité locales et globales suivant z, par une équation d'amplitude, avec ∂_z, GL en fait. Une relation rigoureuse entre le complexe A et le champ de pression-vitesse devrait aussi être dérivée.

Une autre voie consiste à prendre x et z comme coordonnées lentes: la variation est plus lente suivant x et z que suivant y. L'équation d'amplitude fait intervenir ∂_x, ∂_z. Rossi, Huerre, Redekopp (réf.) ont étudié une telle équation, mais je ne sais pas s'ils l'ont dérivée à partir des équations de Navier-Stokes.

"Vers l'aval": solution du modèle GL

Le modèle GLCK0 mérite une solution exhaustive: plusieurs idées fondamentales trouvent leur plus simple application sur cet exemple, qui est presque un paradis mathématique, comparé à d'autres problèmes non-linéaires. Il faudrait confirmer la possibilité de transitions sous critiques pour le chevron. En particulier, l'analogie mécanique du § 3.2., et l'analyse de stabilité non-linéaire des ondes planes devraient être poussées plus avant. Il pourrait y avoir quelque travail mathématique intéressant sur le modèle GLVK0, en particulier avec un cisaillement uniforme sur $\sigma(z)$.

6.2.3. Suggestions expérimentales

6.2.3.1. Quelles expériences?

Propriétés de stabilité linéaire

Les propriétés de stabilité linéaire du sillage demeurent une mine inépuisée d'informations, accessibles par le forçage sous-critique, ou les transitoires.

L'intérêt du forçage sous-critique est qu'un mode linéaire quelconque peut être excité sélectivement. L'inconvénient est que l'on obtient seulement les propriétés sous-critiques, et que l'extrapolation des propriétés super-critiques est délicate.

Au-dessus du seuil, les transitoires sont obtenus en supprimant et rétablissant l'instabilité, en usant de différents artifices, tels que forçage, contre-réaction, fuite à la base ("base bleeding"). Le taux de croissance linéaire et la fréquence doivent être identiques partout dans le champ 3D (ceci n'a toujours pas été clairement démontré!).

Propriétés non-linéaires

Expériences sur le mode pair

• Test de (3.3.1.$20) et (3.3.1.$21), sur le comportement quasi-linéaire de q(z) et R(z). Remarque: la saturation non-linéaire du mode pair prédite par le modèle GLCK0 ne peut être observée si le mode impair apparaît ($L_K > 2\pi$).

• Mesure directe du coefficient de diffusion de phase $1+c_1c_2$, en observant la relaxation d'une perturbation impulsionnelle de la phase (à grand L_K).

• La sous-criticalité de la transition (chevron stable $\rightarrow$ chevron brisé) pourrait être testée en recherchant de l'hysteresis dans une expérience (et une simulation numérique) où L serait une fonction du temps lentement variable (à grand L_K).

Expériences sur le mode impair

La question fondamentale est de trouver pourquoi le mode impair (comprenant le mode (S_2, σ_2) et les cellules de bout) est présent. La dépendance de l'amplitude globale $A_2(t)$ avec Re, L, et le fetch des plaques de bout F, doit être étudiée.

L'entretien du mode impair par l'écoulement près des bouts pourrait apparaître comme un forçage dans l'équation GL. Comme Slaouti et Gerrard (réf.) et Gerich et Eckelmann (réf.) trouvèrent des cellules de bout pour diverses conditions de bout, le processus d'entretien semble largement indépendant des détails de l'écoulement près des bouts.

Une autre question est comment et pourquoi le mode (S_2, σ_2) se divise en cellules de bout (lors d'un accroissement de L à Re constant).

6.2.3.2. Quelle configuration expérimentale?

Deux sondes, dont une mobile, sont nécessaires pour les mesures de phase; l'utilisation d'une batterie de fils chauds permet des mesures simultanées en différent points. La LDA permet des mesures de vitesse absolues et non-intrusives, mais coûte cher, et est difficile près des plaques de bout et des zones de recirculation. Les mesures de la pression à la base sont également non-intrusives, et possibles là où la LDA ne l'est pas. Comme un grand nombre de mesures doivent être réalisées, l'automatisme et le traitement des données doivent être très bien conçus.

Les caractéristiques souhaitables pour la soufflerie sont un Re variable ($30 < Re < 300$), et des plaques de bout de taille et position variables ($5 < L/d < 150$ au moins). Sont très utiles un système de contrôle de l'instabilité du sillage, et un procédé de visualisation par la fumée (ils devraient pouvoir être mis en œuvre en même temps que l'anémométrie). Surveiller les vibrations de l'obstacle est une sage précaution. Pour des raisons techniques (propriétés élastiques, usinage), il est plus facile d'utiliser des obstacles de diamètre plus grand que 0.2 cm. Si différents diamètres sont utilisés, la similitude hydrodynamique n'est pas garantie (au moins parce que la taille de la soufflerie est fixe): il est plus sage, et techniquement plus simple, de conserver un unique cylindre avec d =0.2 cm. Alors, la taille minimum de la soufflerie suivant z est 33 cm, et une gamme convenable de vitesse amont dans l'air est 25 cm/s < V_0 < 225 cm/s. Une non-uniformité de ±5‰ pour l'écoulement libre et un taux de turbulence de 5‰ semblent convenables.

6.2.3.3. Vers une validation systématique du modèle GL

Dans le présent travail, les paramètres mathématiques extérieurs (c_1, c_2) furent partiellement déterminés ad hoc et j'eus recours à des expériences menées dans des conditions et des buts différents ; ainsi, il ne fut pas facile d'acquérir une vision claire. Pour des paramètres physiques extérieurs quelconques L_R et Re, une validation systématique de GLCK0 requiert:

- La détermination des valeurs expérimentales de σ_r, μ_r et c_0, c_1, c_2 (par des transitoires ou des régimes quasi-linéaires), avec une précision accrue (±0.05 sur c_1 et c_2).
- La résolution du modèle GLCK0 avec (L_K, c_1, c_2) tirés de l'expérience.
- La comparaison des caractéristiques du sillage réel et de la solution du modèle

(nœuds, phase, module de l'amplitude, pulsation).

6.3. Sur la nature et l'intérêt de la présente approche

D'une part, un modèle de Ginzburg-Landau est seulement un développement d'équations de perturbation en puissances d'un paramètre extérieur près d'une valeur critique, et certainement pas une explication physique. Comme tous les développements, il échoue en cas de non-analyticité. De plus, dans le cas présent, la validité de l'équation GL n'est pas prouvée mathématiquement, et les expériences ne sont pas exhaustives.

D'autre part, le modèle GL0 est le premier à avoir jamais reproduit le moindre trait d'un sillage 3D. Il n'existe aucun modèle plus simple (qui tienne compte de la non-linéarité et de la tridimensionnalité), et pourtant, **tous les caractères faiblement 3D** sont reproduits, en tenant compte seulement
1• des unités oscillantes (sillages locaux);
2• de la faible tridimensionnalité ou du faible couplage;
3• des conditions aux limites nulles.

A mon avis, la constitution des oscillateurs, en termes de mécanique des fluides, ne joue pas: les effets faiblement 3D sont des phénomènes d'organisation, qu'on pourrait rencontrer dans des situations bien différentes, où les trois points précédents seraient réunis. Pour prendre un exemple extrême, le chevron est une propriété commune au sillage d'un cylindre et aux canards volant en formation (avec des conditions aux limites "pas de canard"!). Dans la nature, les mouvements peuvent être déterminés avec d'autant moins de connaissance physique que les interactions sont faibles. Par exemple, la structure moléculaire de la matière ne sert à rien pour comprendre la mécanique des fluides, et, dans le cas présent, la mécanique des fluides semble inutile pour comprendre les effets faiblement 3D dans le sillage d'un obstacle non profilé.

Bien sûr, cette approche échoue face à une interaction plus forte, où sont révélées des propriétés "microscopiques" (par exemple, ici, le champ de vorticité au voisinage d'une dislocation). Par chance, cependant, le modèle GL rend compte de la transition (chevron $\rightarrow$ chevron brisé).

Notes

Un article très intéressant a été récemment publié par König, Eisenlohr et Eckelmann (réf.), au sujet des effets 3D à grand rapport d'aspect, mais je n'ai pas eu le temps de le comparer avec le présent travail, comme ce fut le cas pour l'article de Williamson.

Les expériences de Lee et Budwig (réf.), publiées en février 1991, sont très proches de celle du § 4.1..

A1. Définition de l'amplitude complexe A

Le but n'est **pas** de dériver l'équation GL à partir des équations de Navier-Stokes, mais de donner un lien entre l'amplitude complexe A et le champ de pression-vitesse, seule quantité observable.

<u>L'amplitude complexe dans le modèle de Landau pour le sillage plan</u>

L'instabilité de Bénard-von Kármán croît à partir des fluctuations d'une petite zone, appelée générateur d'ondes, juste en aval de l'obstacle, où les profils de vitesse locaux sont absolument instables. Dans le modèle de Landau, le générateur d'onde est considéré comme un unique oscillateur, représenté par un nombre complexe A. Ainsi, l'oscillation du fluide à (x, y) = (5d, 0) suffit à caractériser globalement le générateur d'onde.

Le champ de pression-vitesse est $V = (p, V_x, V_y, V_z)$ (Re, t, x, y). L'amplitude complexe A est une fonction complexe de Re et t telle que

$$2\,V(\mathrm{Re}, t, x = 5d, y) = f(\mathrm{Re}, A(t), y/d) \qquad (1)$$

La fonction f est alors développée en puissances de A et A^*:

$$f(\mathrm{Re}, A, y) = \sum_n \sum_{k_1+k_2=n} f_{k_1,k_2}(\mathrm{Re}, y)\, A^{k_1} A^{*k_2} \qquad (2)$$

V est réel, donc

$$f_{k2,\,k1} = f_{k1,\,k2}^{*} \qquad (3)$$

$f_{00}/2$ est l'écoulement de base. La composante V_y (non-nulle) de f_{10}(Re, 0) est fixée à l'unité, par convention. Si A « V_∞, on peut raisonnablement penser que A obéit à une équation de Landau:

$$A_t = \sigma A - l\,|A|^2 A \qquad (4)$$

(f_{10}, σ) est un mode instable du problème de stabilité linéaire de l'écoulement de base. Les termes d'ordre n > 1 dans (2) sont responsables des effets non-linéaires, tels que la distorsion de l'écoulement moyen et de la génération d'harmoniques. Un observateur placé sur la ligne y = 0, et sensible seulement à V_x, ne peut distinguer si un vortex est émis avec y < 0 ou y > 0; donc, la composante V_x de f_{10}(Re, 0) est nulle.

<u>L'amplitude complexe dans le modèle GL pour le sillage 3D</u>

Re et d peuvent maintenant varier lentement avec z. Le champ de pression-vitesse est V(Re, t, x, y, z). L'état du générateur d'ondes est toujours représenté par A, mais A peut varier avec z:

$$2\, V(t, x = 5d(z), y, z) = f(Re(z), A(t, z), y/d(z)) \qquad (5)$$

La ligne (x, y, z) = (5d(z), 0, z) est représentative de l'ensemble du générateur d'ondes. (La fonction f est la même que dans le cas plan.)

L'équation GL est obtenue en ajoutant un couplage diffusif à l'équation de Landau:

$$\partial_t A = \sigma(z)A + \mu\, \partial^2{}_z A - l(z)\,|A|^2 A \qquad (6)$$

A2. Evolution du sillage vers l'aval

Le modèle GLCK0 décrit l'état du générateur d'onde, dont l'étendue est finie vers l'aval: A(t, z) donne seulement la forme des vortex à leur naissance. L'évolution vers l'aval n'est pas simple, en particulier, dans un écoulement cisaillé. Cependant, les visualisations suggèrent une simple règle de translation, dans le cas où $V_\infty(z)$ et d(z) sont uniformes: chaque filament de colorant est simplement translaté vers l'aval avec une vitesse (de phase) c.

Dans le cas d'un état t-périodique, de période T, la règle se ramène à une invariance par translation cT vers l'aval. Ceci peut être vérifié sur diverses photographies, publiées par Berger (réf.), Gerrard (réf.). La règle est encore valable pour le transitoire 3D apparaissant sur la fig. 10 de Williamson (réf. 2). En fait, la vitesse de front donnée par Williamson sous-entend que le coin d'un filament donné reste au même z pendant son advection, un point qui m'a été confirmé par Williamson.

Cette règle de translation mérite quelques remarques:

1• Les filaments de colorants sont quelque peu distordus au cours de leur advection: ils développent des oscillations, et un coin dégénère facilement en deux coins (Williamson (réf. 2)).

2• Quand le sillage se compose de plusieurs cellules, la règle peut s'appliquer à chacune, avec une célérité propre.

3• Il faut reconnaître que la concentration en colorant n'est pas la meilleure mesure du champ de vorticité; le colorant s'enroule autour des cœurs de vortex, formant des filaments qui subsisteraient même après la mort des vortex. Ils sont en partie un enregistrement de l'état du générateur d'onde, translaté vers l'aval: en quelque sorte, le système de visualisation agit comme un "enregistreur" de l'état du générateur d'onde. Ainsi, il se pourrait que la règle de translation marche moins bien pour les filaments de vorticité que pour les filaments de colorant.

4• La règle de translation résulte également de l'intérêt et des contraintes expérimentales: le temps τ_e (visqueux) d'évolution d'un vortex donné est plus grand, par un facteur d'ordre Re, que le temps τ_0 (convectif) dont on dispose pour son observation (temps passé dans la section d'observation de la soufflerie). Un vortex donné, une fois émis, n'a pas le temps d'évoluer pendant qu'on l'observe.

L'écoulement instable est ainsi approché par une onde progressive:

$$V(t, x, y, z) \approx V(t-(x-5d)/c, 5d, y, z) \qquad (1)$$

D'après la définition (A1.$5) :

2 V(t, x, y, z) = f(A(t-(x-5d)/c, z), y) (2)

t équivaut à -x/c. Grâce à cette propriété, les représentations graphiques de A(t, z) peuvent être interprétées non seulement comme l'évolution temporelle du générateur d'onde, mais encore comme une photographie de tout le sillage.

Démonstration de la loi de symétrie

Voir DRA 04.

Hypothèse: deux allées de vortex semi-infinies se rejoignent progressivement (sans dislocation) en différents points d'un même plan, animé d'un mouvement de translation dans le référentiel du fluide au repos. On autorise une viscosité faible, telle que la circulation κ, le nombre d'onde k, et la largeur b varient peu dans l'espace.

Je raisonne dans le référentiel du fluide au repos. Pour une allée stable de vortex 2D, caractérisée par κ, k, b, j'utilise les résultats suivants:

- La pulsation ω est donnée par $\omega = f(\kappa, k, b)$.
- La stabilité est obtenue pour $g(\kappa, k, b) = 0$.

Il n'est pas nécessaire ici de connaître f et g.

Les allées sont étiquetées 0 et 1. Assez loin du plan de connexion, chaque allée est identique à une allée 2D. Chaque vortex 0 est relié à un vortex 1. Comme la circulation est la même partout autour d'un tube de vorticité, $\kappa_0 = \kappa_1 \equiv \kappa$. La continuité de la phase à travers le plan de connexion impose $\omega_0 = \omega_1 \equiv \omega$. Ainsi, on parvient à un système de deux équations, où l'inconnue est (k_1, b_1):

$f(\kappa, k_0, b_0) = f(\kappa, k_1, b_1)$

$g(\kappa, k_1, b_1) = 0$

Une solution évidente est $(k_1, b_1) = (k_0, b_0)$. J'admets que c'est la seule. Ainsi, $(\kappa_1, k_1, b_1) = (\kappa_0, k_0, b_0)$, et le plan de connexion est un plan de symétrie de l'écoulement.

Pendant le transitoire du chevron (DRA 04, § 3.4. et Williamson (réf. 2)), l'angle θ entre les deux ondes est stationnaire, donc le plan de connexion est bien en translation dans le référentiel du fluide au repos. Le résultat précédent s'applique, en négligeant l'influence de l'obstacle sur les allées de vortex (correct si $x > 10$ d) et l'influence directe des bouts.

A3. Résultats utiles: l'équation de Landau, l'équation de diffusion de phase

A3.1. Solution de l'équation de Landau

$$A_t = (\sigma_r + i\sigma_i)\, A - (l_r + il_i)\, |A|^2 A \tag{1}$$

avec $\sigma_r > 0$, $l_r > 0$ (pour assurer la saturation), σ_i, l_i réels.

Avec $A = R \exp(i\phi)$, $R > 0$, (1) se ramène à

$$R_t = \sigma_r R - l_r R^3 \tag{2}$$

$$\Phi_t = \sigma_i - l_i R^2 \tag{3}$$

La solution de (2) est:

$$R(t)^{-2} - l_r/\sigma_r = \exp(-2\,\sigma_r t)\,[R(0)^{-2} - l_r/\sigma_r] \tag{4}$$

La solution asymptotique est sinusoïdale:

$$A(t) = (\sigma_r/l_r)^{1/2} \exp(i\,\sigma_r\,(\sigma_i/\sigma_r - l_i/l_r)\,t) \tag{5}$$

Il y a un décalage non-linéaire sur la fréquence.

A3.2. L'équation de diffusion de phase

Cette équation fut dérivée dans un contexte plus général par Kuramoto (réf.), pour un champ d'oscillateurs couplés. Voici une démonstration élémentaire sur l'équation GL:

$$A_t = (1+i\,c_0)\, A + (1+i\,c_1)\, A_{zz} - (1+i\,c_2)\, |A|^2 A \tag{1}$$

Avec

$$A(t, z) = R(t, z) \exp(i(c_0 - c_2)t + i\Phi(t, z)) \tag{2}$$

les parties réelle et imaginaire de (1) sont

$$R_t = R - R^3 + (R_{zz} - R\Phi_z^2) - c_1\,(2R_z\Phi_z + R\Phi_{zz}) \tag{3}$$

$$R\Phi_t = c_2(R - R^3) + c_1\,(R_{zz} - R\Phi_z^2) + (2R_z\Phi_z + R\Phi_{zz}) \tag{4}$$

Après des combinaisons linéaires:

$$R_t = R - R^3 + (R_{zz} - R\Phi_z^2) - c_1(2R_z\Phi_z + R\Phi_{zz}) \tag{5}$$

$$-c_2 R_t + R\Phi_t = (c_1 - c_2)\,(R_{zz} - R\Phi_z^2) + (1 + c_1 c_2)\,(2R_z\Phi_z + R\Phi_{zz}) \tag{6}$$

J'étudie le développement, pour ε petit,

$$R(t, z) = 1 + \varepsilon\, R_1(T, Z) + O(\varepsilon^2) \tag{7}$$

où $T = \varepsilon\, t$ et $Z = \sqrt{\varepsilon}\, z$ sont les variables lentes. En cherchant Φ sous la forme

$$\Phi(t, z) = \Phi_0(T, Z) + O(\varepsilon) \tag{8}$$

(1) se réduit à

$$\Phi_{0T} = -(c_1 - c_2)\, \Phi_{0Z}{}^2 + (1 + c_1 c_2)\, \Phi_{0ZZ} \tag{9}$$

$$2R_1 = -\Phi_{0Z}{}^2 - c_1 \Phi_{0ZZ} \tag{10}$$

Dans cette approximation, R_1 est " l'esclave " de la phase Φ_0.

Une solution de (9) est

$$\Phi(T, Z) = \frac{\alpha}{\beta} \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{b\beta}{\alpha}(Z + 2a\beta T)\right)\right) + aZ + \beta(a^2 + b^2)T \tag{11}$$

a et b sont deux constantes réelles arbitraires,

$$\alpha = 1 + c_1 c_2, \quad \beta = -(c_1 - c_2) \tag{12}$$

Pour $Z+2a\beta T \to \pm\infty$, Φ représente deux sections d'onde plane, avec

$$\Phi_Z = a \pm b, \quad \Phi_T = \beta(a \pm b)^2 \tag{13}$$

La solution (11) présente la transition d'une section d'onde plane à une autre, sur une distance

$$\Delta Z = 2\alpha/(\beta b) \tag{14}$$

Comme ΔZ est petit (devant la taille de l'intervalle de définition), la zone de transition est appelée conventionnellement choc de phase (bien qu'elle soit continue). Remarquablement, le signe de β est opposé pour les ondes chimiques (Kuramoto (réf.)) et le sillage (§ 3.3.1). Si α est négatif, le couplage diffusif favorise l'instabilité, ce qui produit des solutions incompatibles avec l'hypothèse de variables lentes. L'équation de diffusion de phase n'est utilisable que si

$$\alpha > 0 \tag{15}$$

A4. Configuration expérimentale et méthode numérique

A4.1. Configuration expérimentale

La soufflerie se compose d'une contraction alimentant un tube cylindrique de section carrée de 10 cm de côté. Dans les expériences antérieures (Mathis (réf.), Provansal (réf. 1)), les parois de la soufflerie tenaient lieu de plaques de bout. Les EPBLs croissaient le long de F = 15 cm (distance entre l'obstacle et l'entrée du tube). La longueur de l'obstacle était donc L = 10 cm et différents diamètres d étaient possibles.

Dans cette configuration, accroître L_R à Re constant demandait un accroissement de vitesse amont, qui impliquait des variations de l'écoulement de base (par exemple, des EPBLs). L'effet de blocage était très important pour les plus grands diamètres (d > 0.7 cm), et variable selon l'obstacle. Le modèle GLCK0 pouvait difficilement être testé, parce qu'une variation continue de L_K, indépendamment de (c_1, c_2), était impossible.

J'utilisai donc une configuration différente, avec des plaques de bout mobiles et un constant d =1.6 mm. Les plaques de bout étaient idéalement des demi-plans définis par ($x \geq -F$ et $z = \pm L/2$), avec F = 20 mm. En déplaçant les plaques de bout sans changer le débit d'air, les EPBLs, le (faible) effet de blocage, les écoulements de base locaux, et donc (c_1, c_2), restaient constants, alors que L_K variait. Comme les structures en cellules étaient sensibles à la dissymétrie, la symétrie mécanique était de préférence conservée.

Dans le meilleur des cas, le taux de turbulence, y compris le bruit de mesure, était 5 ‰ et la non-uniformité (obstacle enlevé) était ±5 ‰ hors des EPBLs. J'avais supprimé une grille à l'entrée du tube cylindrique.

Un seul point mobile de LDA enregistrait à la fois la vitesse amont et les fluctuations de V_x (mais pas simultanément). Les obstacles étaient des barreaux d'aluminium rigides, indéformables sous l'effet de l'écoulement; leurs bouts étaient vissés aux parois de plexiglas. A une occasion, le barreau, fixé par un bout seulement, produisit une discontinuité de fréquence, qu'on put supprimer en vissant les deux bouts; le barreau oscillait donc grâce à la flexibilité de la paroi!

A4.2. Méthode numérique

L'équation GL (2.3.$2) est résolue pour

• Des coefficients complexes donnés $\sigma(z)$, $\mu(z)$, $l(z)$. Supposer les coefficients uniformes ne simplifie pas le problème numérique. Bien sûr, le changement d'échelles de Kuramoto améliore la précision (§ 3.1.).

• Des conditions aux limites soit nulles (e = 0), soit périodiques (e = 1), à z ± L/2.

• Conditions initiales: pour simuler la réalité, je prends du bruit aléatoire comme conditions initiales, avec un taux de turbulence (variance relative) comparable à celui de la soufflerie. Mais le choix des conditions initiales est libre, en général.

Un pas de temps dt et un pas d'espace dz sont choisis. J'abrège (n dt, pdz-L/2) en (n, p), où n = 0, ..., nmax et p = 0, ..., pmax = int(L/dz). GL est discrétisée avec une erreur $O(dt^2+dz^2)$:

$$A_t(n+1, p) = dt^{-1}\, 1.5\, (A(n+1, p) - 2A(n, p) + 0.5\, A(n-1, p)) + O(dt^2) \qquad (1)$$

$$A_{zz}(n+1, p) = dz^{-2}\, (A(n+1, p+1) - 2\, A(n+1, p) + A(n+1, p-1)) + O(dz^2) \qquad (2)$$

GL est linéarisée grâce à

$$|A(n+1, p)|^2\, A(n+1, p) = |2A(n, p)-A(n-1, p)|^2\, A(n+1, p) + O(dt^2) \qquad (3)$$

Avec

$$r(n+1, p) / dz^2 = dt^{-1}\, 1.5 - \sigma(p) + l(p)\,|2A(n, p)-A(n-1, p)|^2 + dz^{-2}\, 2\mu(p) \qquad (4)$$

$$s(n+1, p) / dz^2 = dt^{-1}\, (2A(n, p) - 0.5\, A(n-1, p)) \qquad (5)$$

GL devient un système d'équations linéaires où l'inconnue est A(n+1, .), et les coefficients sont $\mu(p)$, et r(n+1, .), s(n+1, .), fonctions de A(n, .), A(n-1, .):

$$-\mu(p)\, A(n+1, p-1) + r(n+1, p)\, A(n+1, p) - \mu(p)\, A(n+1, p+1) = s(n+1, p) \qquad (6)$$

pour p = 1-e, ..., pmax -1 (si e = 1, je considère que p est défini modulo pmax).

Si e = 0, alors A(n+1, 0) = A(n+1, pmax) = 0 et

$$\begin{pmatrix} r(1) & -\mu(1) & 0 & \cdots & 0 \\ -\mu(2) & r(2) & -\mu(2) & \ddots & \vdots \\ 0 & -\mu(3) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & r(pmax-2) & -\mu(pmax-2) \\ 0 & \cdots & 0 & -\mu(pmax-1) & r(pmax-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ A(pmax-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ s(pmax-1) \end{pmatrix}$$

Si e =1, alors A(n+1, 0) = A(n+1, pmax) et

$$\begin{pmatrix} r(0) & -\mu(0) & 0 & & -\mu(0) \\ -\mu(1) & r(1) & -\mu(1) & \ddots & \\ 0 & -\mu(2) & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & r(pmax-2) & -\mu(pmax-2) \\ -\mu(pmax-1) & & 0 & -\mu(pmax-1) & r(pmax-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ A(pmax-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ s(pmax-1) \end{pmatrix}$$

Avec P = pmax-2+e, les deux cas sont regroupés en

$$\begin{pmatrix} r_0 & b_0 & 0 & & eb_0 \\ b_1 & r_1 & b_1 & \ddots & \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & r_{P-2} & b_{P-2} \\ eb_P & & 0 & b_{P-2} & r_{P-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{P-1} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Ce système est résolu par élimination de Gauss sans pivot, puis substitution inverse.

Un pas de temps plus grand peut être adopté si c_0 est adapté, i.e. décalé pour minimiser le maximum en fonction de z du module de la pulsation $\omega = \partial_t$ arg(A(t, z)) (c.f. § 3.1.). Avec c_1, c_2 d'ordre 1, une solution précise exige $dt < 0.5$ et $dz < 1$. L'arithmétique complexe de FORTRAN77 en simple précision fut utilisée, sur une station de travail Sun 4/260.

Références

P.Albarède. Perturbations tridimensionnelles du sillage d'un cylindre à bas nombre de Reynolds. Stage de Magistère Interuniversitaire de Physique, Université Paris 6, juin 1989.

P.Albarède, M.Provansal, L.Boyer. Modélisation par l'équation de Ginzburg-Landau du sillage tridimensionnel d'un obstacle allongé. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série II, p. 459-464, 1990.

E.Berger. Unterdrückung der laminaren Wirbelströmung und des Turbulenz-einsatzes der kármánischen Wirbelstrasse bei kleinen Reynoldszahlen. Jachbuch der 1964 WGLR.

E.Berger, R.Wille. Periodic flow phenomena. Annu. Rev. Fluid Mech. 1972. 4:313-340.

M.Braza, P.Chassaing, H.Ha Minh. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. J. Fluid Mech. (1986), vol. 165, pp. 79-130.

J.M.Chomaz P.Huerre L.G.Redekopp. Bifurcations to Local and Global Modes in Spatially Developing Flows. Phys. Rev. Lett. **6 0**, 25 (1988).

P.Clavin. Selection of the chevron wave number. Private communication.

E.Detemple-Laake and H.Eckelmann. Phenomenology of Kármán vortex streets in oscillatory flow. Experiments in Fluids 7, 217-227 (1989).

P.G.Drazin and W.H.Reid. Hydrodynamic stability. Cambridge university press.

H.Eisenlohr and H.Eckelmann. Vortex splitting and its consequences in the vortex street wake of cylinders at low Reynolds number. Phys. Fluids A 1 (2), February 1989.

M.Gaster. Vortex shedding from slender cones at low Reynolds number. J. Fluid Mech. (1969), vol. 38, part 3, pp. 565-576.

M.Gaster. Vortex shedding from circular cylinders at low Reynolds number. J. Fluid Mech. (1971), vol. 46, part 4, pp. 749-756.

D.Gerich, H.Eckelmann. Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders. J. FLuid Mech. (1982), vol. 122, pp. 109-121.

D.Gerich. A limiting process for the von Kármán vortex street showing the change from two- to three-dimensional flow.

J.H.Gerrard. The three-dimensional structure of the wake of a circular cylinder. J. Fluid Mech. (1966), vol. 25, part 1, pp. 143-164.

H.Haken. Synergetics, an introduction. Springer-Verlag 1978.

F.R.Hama. Three-Dimensional Vortex Pattern Behind a Circular Cylinder. Journal of the Aeronautical Sciences, 1957, vol. 24, p. 156

M.Hammache and M.Gharib. A novel method to promote parallel vortex shedding in the wake of circular cylinders. Phys. Fluids A **1** (10), October 1989.

P.Huerre, P.A.Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. 22:473-537

G.E.Karniadakis, G.S.Triantafyllou. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. J. Fluid Mech. (1989), vol. 199, pp. 441-469.

M.König, H.Eisenlohr, H.Eckelmann. The fine structure in the Strouhal-Reynolds number relationship of the laminar wake of a circular cylinder. Phys. Fluids A **2** (9), September 1990.

Y.Kuramoto. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer-Verlag, 1984.

H.Lamb. Hydrodynamics, sixth edition. Cambridge University Press, 1932.

Y.Lecointe, J.Piquet. On the use of several compact methods for the study of unsteady incompressible viscous flow round a circular cylinder. Computers & Fluids Vol. 12, No. 4, pp. 225-280, 1984.

T.Lee, R.Budwig. A study of the effect of aspect ratio on vortex shedding behind circular cylinders. Phys. Fluids A **3** (2), February 1991.

C.C.Lim. Dynamics of the Von Kármán vortex street. Ph.D. Brown University, 1987.

C.Mathis. Propriétés des composantes de vitesse transverses dans l'écoulement de Bénard-von Kármán aux faibles nombres de Reynolds. Thèse, Université de Provence, 1983.

C.Mathis, M.Provansal and L.Boyer. The Bénard-von Kármán instability: an experimental study near the threshold. J. Physique Lett. **4 5** (1984) L-483 - L-491.

C.Mathis, M.Provansal, L.Boyer. The rotating grating applied to the study of the Bénard-von Kármán instability near the threshold. Proc. Second Intl. Symp. on Applications of Laser Anemometry to Fluid Mechanics, Lisbon, 1984.

E.Meiburg and J.C.Lasheras. Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes. J. Fluid Mech. (1988), vol. 190, pp.1-37.

P.A.Monkewitz. The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds number. Phys. Fluids **3 1** (5), May 1988.

P.A.Monkewitz. Near threshold expansion of the GLCK0 model t-sinusosidal solution. Private communication.

M.Provansal. Etude expérimentale de l'instabilité de Bénard-von Kármán.Thèse, Université de Provence, 1988.

M.Provansal. Energy-frequency measurements during transients. Private communication.

M.Provansal, C.Mathis, L.Boyer. Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. J. Fluid Mech. (1987), vol. 182, pp. 1-22.

S.Raghu, P.A.Monkewitz. The bifurcation of a hot round jet to limit-cycle oscillations. To be published in Physics of Fluids A.

S.E.Ramberg. The effects of yaw and finite length upon the vortex wakes of stationary and vibrating circular cylinders. J.Fluid Mech. (1983), vol. 128, pp. 81-107.

M.Rossi, P.Huerre, L.G.Redekopp. A model of Boundary Effects in Kármán Vortex Streets. Bulletin of the American Physical Society. Vol. 34, No. 10 (1989).

J.Y. Sa, K.S. Chang. Shedding patterns of the near-wake vortices behind a circular cylinder. To be published in Int. J. for Numerical Methods in Fluids.

A.Slaouti, J.H.Gerrard. An experimental investigation of the end effects on the wake of a circular cylinder towed through water at low Reynolds numbers. J. Fluid Mech. (1981), vol. 112, pp. 297-314.

K.R.Sreenivasan, 1985 Transition and turbulence in fluid flows and low-dimensional chaos. In *Frontiers in Fluid Mechanics* (ed. S.H.Davis & J.L.Lumley), pp. 41-67. Springer.

P.J.Strykowski. The control of absolutely and convectively unstable flows. Ph. D. Yale University, 1986.

G.S.Triantafyllou, G.E.Karniadakis. Computational reducibility of unsteady viscous flows. Phys. Fluids A **2** (5), May 1990.

D.J.Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. J. of Fluid Mech. (1959) vol. 6, pp.547-567.

D.J.Tritton. A note on vortex streets behind circular cylinders at low Reynolds numbers. J. of Fluid Mech. (1971) vol. 45, part 1, pp. 203-208.

C.H.K.Williamson. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. Phys. Fluids 3 1 (11), 3165, November 1988.

C.H.K.Williamson. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. J. FLuid Mech. (1989), vol. 206, pp. 579-627.

Bibliographie

E.Berger. Suppression of Vortex Shedding and Turbulence behind Oscillating Cylinders. The physics of fluids supplement, 1967.

D.Gerich. The development of three dimensionality in the near and in the far wake due to changes of the boundary conditions. Tenth Australasian fluid mech. conference. Univ. of Melbourne, 11-15 December 1989, vol. 2.

J.H.Gerrard. The wakes of cylindrical bluff bodies at low Reynolds number. Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 288, p.351 (1978).

L.S.G.Kovásznay. Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers. Proc. R. Soc. **A 198** (1949) 174.

D.Lazimi. The flame of genius at low Markstein numbers. The Dead Sea Phil. Soc. Jerusalem. Special issue, January 1991.

H.Oertel Jr.. Wakes behind blunt bodies. Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. 22: 539-64.

A.Roshko. NACA technical note 2913. On the development of turbulent wakes from vortex streets. March 1953.

J.W.Schaefer, S.Eskinazy. An analysis of the vortex street generated in viscous fluid. J. Fluid Mech. (1959), vol. 6, pp. 241-260.

S.Taneda, Rep. Res. Inst. Appl. Mech. **1**, 131(1952).

C.H.K.Williamson. The development of Λ-shaped vortical structures caused by "vortex dislocations" in a planar wake. Phys. Fluids A, Vol. 1, No. 9, September 1989, Gallery of Fluid Motion.

Résumé

Le sillage à bas nombre de Reynolds d'un obstacle allongé et non profilé est considéré comme une chaîne d'oscillateurs couplés, gouvernée par une équation de Ginzburg-Landau, avec des conditions aux limites nulles.

La solution du modèle, tantôt numérique, tantôt analytique, est exposée. Diverses analogies sont proposées: avec un puits quantique, avec un problème de mécanique du point (non-hamiltonien). La comparaison interactive du modèle et de l'expérience révèle les point suivants:

- Le rôle des conditions aux limites est primordial.
- Dans une certaine mesure, les variations du nombre de Reynolds et du rapport d'aspect ont des effets identiques.
- Près du seuil, une description quasi-linéaire est légitime.
- Loin du seuil apparaît une structure en chevron, parfois instable.

Le modèle de Ginzburg-Landau, malgré sa simplicité maximale, reproduit la plupart des effets spatio-temporels observés. Il résout un grand nombre de contradictions, et ouvre une voie nouvelle dans la compréhension de l'instabilité des sillages tridimensionnels.

Mots clés

Ecoulement ouvert, sillage, instabilité de Bénard-von Kármán, instabilité absolue, champ de vortex 3D, équation de Ginzburg-Landau, chevron, sélection du nombre d'onde, diffusion de phase, auto-organisation, singularités de phase.